剛体 (力のモーメント)の要点　for 1/31 単元テスト

とにかく、剛体の問題に対してできることは、剛体の①力のつりあいと、②力のモーメントのつりあいを考えることです。「何が問われても、①と②の式を立式してみる」のも良いでしょう。

1　図のように，なめらかな壁と摩擦のある床に，一様な太さの棒を立てかける。棒と床がなす角を θ とする。図に働く力を図示した上で、棒が壁から受ける力の大きさ R、床からの摩擦力 F を求めなさい。(力を分解しないでやってみましょう。)

Mgをつかって

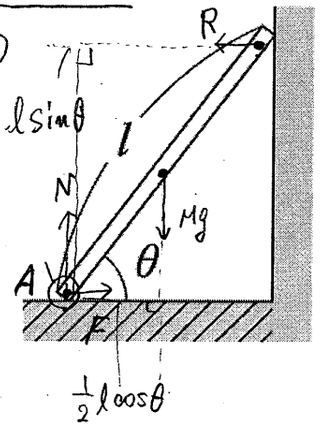
鉛直方向の力のつりあい　$N-Mg=0$　$N=Mg$ ①

水平方向の力のつりあい　$R-F=0$　$R=F$ ②

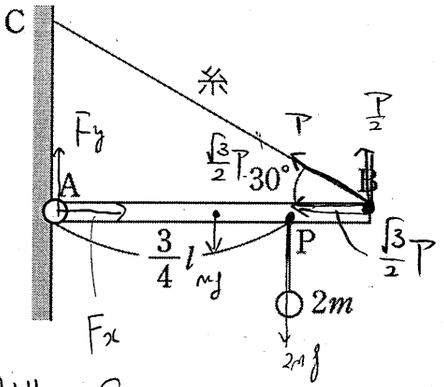
A点まわりの力のモーメントのつりあい

$-Mg\cdot\frac{l}{2}\cos\theta + Rl\sin\theta$ ③

③より　$R=\frac{Mg}{2\tan\theta}$　②より　$F=R=\cdots\cdots$



2　質量 m, 長さ l の棒の一端Aをちょうつがいで壁につけ，他端Bと壁面Cを糸で結ぶ。この棒に質量 $2m$ のおもりをAから $\frac{3}{4}l$ の点Pに下げたら，棒は水平で糸は棒と 30° の角をなしてつりあった。このとき糸の張力 T, A端にはたらく力 F の大きさを求めたい。重力加速度の大きさを g とする。ちょうつがいに働く力の向きは分からないので、仮に図の鉛直上向き成分を F_y, 水平右成分を F_x として考えてみよう。



(1)棒に働く力の、水平方向の力のつり合いの式を立てなさい。

$F_x-\frac{\sqrt{3}}{2}T=0$　—①

(2)棒に働く力の、鉛直方向の力のつり合いの式を立てなさい。

$F_y+\frac{1}{2}T-mg=0$　—②

(3)点Aのまわりのモーメントのつり合いの式を立てなさい。

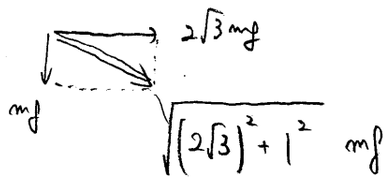
$-mg\frac{1}{2}l-2mg\cdot\frac{3}{4}l+\frac{T}{2}l=0$　—③

(4)T、F を m, g を用いて表しなさい。

③より、$\frac{T}{2}=2mg \Leftrightarrow T=4mg$　—④

④より　$F_x=\frac{\sqrt{3}}{2}T=2\sqrt{3}mg$

④より　$F_y=mg-2mg=-mg$



$=\sqrt{13}mg$

//

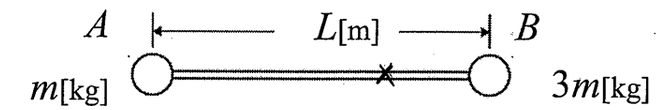
3　次の重心に関する問題を考えてみよう。

(1)図のように長さ L[m]の軽い剛体棒の両端に質量 m[kg]の球Aと $3m$[kg]の球Bをつけたとき，この2つの球全体の重心は球Aから何mm離れた点か。重心の公式を使って求めてみよう。

Aからの距離

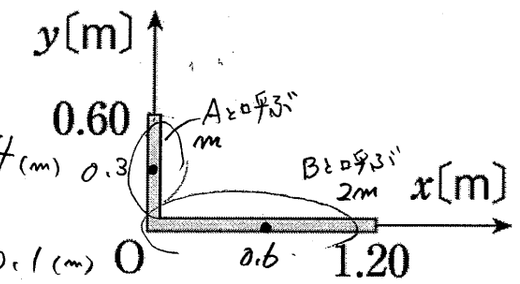
$x_G=\frac{m\times0+3m\times L}{m+3m}$

$=\frac{3}{4}L$ [m]



今後のために、この式は1はっを使えた方がいい。
特に、旧帝大以上を目指す人は。いずれ分かるときが来る。

(2)長さ 1.80m の一様な太さの針金を，図のように直角に折り曲げ，折り曲げた点を原点として，x 軸，y 軸をとる。針金の重心の位置の座標を求めよ。

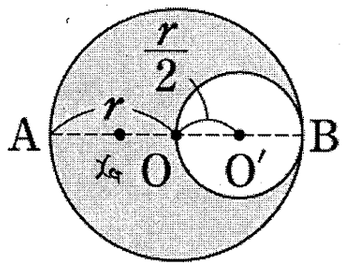


$x_G=\frac{mx_{AG}+2mx_{BG}}{m+2m}=\frac{m\times0+2m\times0.6}{m+2m}=0.4$ (m)

$y_G=\frac{my_{AG}+2my_{BG}}{m+2m}=\frac{m\times0.3+2m\times0}{m+2m}=0.1$ (m)

(0.40 [m], 0.10 [m])

(3)図のように，半径 r の一様な円板から，それに内接する半径 $\frac{r}{2}$ の小円形部分を切り抜いた。切り抜いたあとの板の重心の位置を求めたい。下記のヒントを参考にして、求めてみましょう



(a)切り抜いた後の重心の位置を予想して図に記入しましょう。

→AB上にあることを確認。その座標を x_G とする。

(b)「切り抜いたあとの板」と「小円形部分」を合わせた物体の重心は、どこにありますか？

→自明ですね。　⇨ 原点O　→ 残りの部分は $3m$

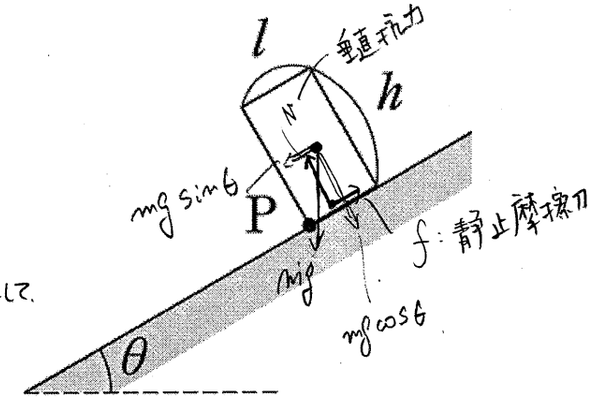
(c)「小円形部分」の質量を仮に m として，(b)の重心をもとめる式を立式してみよう。

→左辺は0ですね。左辺は x_G と r を用いて立式します。

$0=\frac{m\cdot\frac{r}{2}+3m\cdot x_G}{m+3m}$　だから、$x_G=\frac{r}{6}$

//

4 質量が m，底面の 2 辺の長さがともに l，高さが h の直方体を板上に置き、図のように板の角度 θ を大きくしていくことを考える。静止摩擦係数を μ、重力加速度の大きさを g とする。図の状態で、直方体には P から x だけ離れたところに床からの抗力が作用し、静止していた。



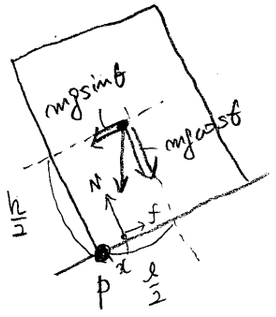
(0) 直方体に働く力をすべて図示せよ。 fとして、Nとして、

(1) このとき、直方体にはたらく静止摩擦力と，垂直抗力の大きさを求めよ。（求めるための式を確実に立式すること。改めて言う。静止摩擦力は絶対に μN ではない。）

力のつり合い $mg\sin\theta - f = 0$ より、 $f = mg\sin\theta$.

$mg\cos\theta - N = 0$ $N = mg\cos\theta$.

(2) 重力を斜面に平行な成分と垂直な成分に分解し，それぞれの成分について点 P のまわりの力のモーメントの大きさを求めよ。



(図より)

水平成分 $mg\sin\theta \times \frac{h}{2}$ 鉛直成分 $mg\cos\theta \times \frac{l}{2}$

(3) 点 P のまわりの力のモーメントのつり合いの式を立式せよ。

$+ mg\sin\theta \times \frac{h}{2} - mg\cos\theta \cdot \frac{l}{2} + \underbrace{mg\cos\theta \cdot x}_{N\ x} = 0$

(4) 角度が θ の時の抗力の作用点の位置 $x(\theta)$ を求めよ。

(より)

$x_{(\theta)} = \frac{l}{2} - \frac{h}{2\tan\theta}$ θ が大きくなる → $\tan\theta$ が大きくなる → x は小さくなる.

(5) θ を大きくしていくとある角度に達したときに直方体は傾いた。この時抗力の作用点の位置 x はいくらになっていたか。また、そのことを利用して直方体が傾く時の $\tan\theta$ の値を求めよ。

$x \leqq 0$ で倒れる。 $x = 0$ より、 $\frac{l}{2} - \frac{h}{2}\tan\theta = 0$ ⇔ $\tan\theta = \frac{l}{h}$ //

☞補足 θ が $0 \leqq \theta \leqq 90°$ であれば、θ が大きくなると、$\tan\theta$ は単調に増加する。そのため、板を傾けると $\tan\theta$ の値が徐々に大きくなり、それが l/h に達したときに直方体は傾くことが分かる。

一方で、この直方体は傾く前に板上を滑り降りることも考えられる。

(6)物体の最大摩擦力はいくらか。

$f_0 = \mu N = \mu mg\cos\theta$

(7)板の角度が θ に達したときに、直方体が滑りだしたとする。このとき、(1)の静止摩擦力と、(6)を比較することで、板上を滑り出すときの $\tan\theta$ の値を μ，h，l から必要なものを用いて表せ。

静止摩擦力 = 最大摩擦力 であればよく、

$mg\sin\theta = \mu mg\cos\theta$

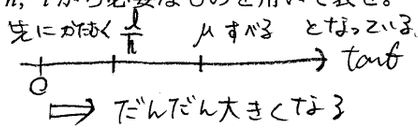
$\tan\theta = \mu$

(8)直方体が、滑り出す前に傾いたとき、(5)と(7)の大小関係はどのようになっているか考察し、静止摩擦係数 μ が満たすべき条件を h，l から必要なものを用いて表せ。

μ に達すると、すべる.

$\frac{l}{h}$ に達すると、傾く.

先にかたむく $\frac{l}{h}$ μ すべる となっているはず. よって、



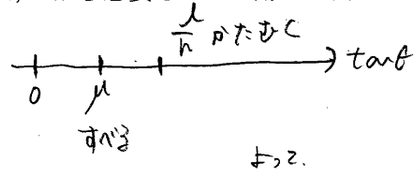
⇒ だんだん大きくなる

$\frac{l}{h} \leqq \mu$

(9)直方体が、傾く前に滑り出したとき、(5)と(7)の大小関係はどのようになっているか考察し、静止摩擦係数 μ が満たすべき条件を h，l から必要なものを用いて表せ。

このとき

大小関係は、



となっているはず.

よって、

$\mu < \frac{l}{h}$ //

1 R も F も $\frac{Mg}{2\tan\theta}$

2 (1) $N_x - \frac{\sqrt{3}}{2}T = 0$ (2) $N_y + \frac{1}{2}T - 3mg = 0$ (3) $\frac{1}{2}Tl - 2mgl = 0$ (4) $T = 4mg$、$F = \sqrt{13}mg$

3 (1) $\frac{3}{4}L$ (2) (0.40m，0.10m) (3) $0 = \frac{3m \times x_G + m \times (r/2)}{3m+m}$ O から A の向きに $\frac{r}{6}$ の位置

4 (1) 静止摩擦力：$mg\sin\theta$，垂直抗力：$mg\cos\theta$

(2) 平行：$\frac{mgh\sin\theta}{2}$，垂直：$\frac{mgl\cos\theta}{2}$ (3) $\frac{mgh\sin\theta}{2} - \frac{mgl\cos\theta}{2} + mgx\cos\theta = 0$

(4) $x(\theta) = \frac{l}{2} - \frac{h}{2}\tan\theta$ (5) $x=0$ $\tan\theta = \frac{l}{h}$ (6) $\mu mg\cos\theta$ (7) μ (8) $\frac{l}{h} \leq \mu$ (9) $\mu < \frac{l}{h}$

詳解は 1/26 夕方 UP 予定

「練習は本番のように、本番は練習のように」がモットーの作問者Ⅰ。今回は第４問の作問に悩んでいた様子だった。結果的には納得の良問が出来たようである。

毎回思考力が問われる第４問。「少しでも食らいつこう」という意欲が見える答案を見つけると、採点していて嬉しくなる。今回も期待している。