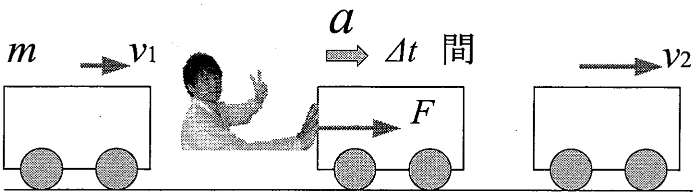
運動量の要点

1 次の図を見て、答えなさい

質量 m の台車が速度 v_1 で動いている。この台車に大きさ F の力を図のように Δt 秒間加えたところ、その速度は v_2 となった。



この間の運動について、運動方程式を m,a,F を用いて立式すると、(1 $ma = F$)のようになる。

また、加速度 a を、$v_1,v_2,\Delta t$ を用いて書くと、(2 $\frac{v_2-v_1}{\Delta t}$) と書ける。 $m\frac{v_2-v_1}{\Delta t} = F$

(1)と(2)から、$mv_2 - mv_1 =$ (3 $F\Delta t$) という式を導出することが出来る。左辺は (4 運動量) [ことば]の変化を、右辺は (5 力積) [ことば]と呼ばれる量を表している。

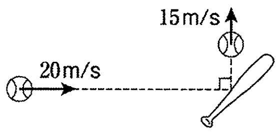
2 空欄にことばを補い、それぞれが適用できる条件を確認しましょう。

○力学的エネルギー保存則は、(6 非保存力のする仕事) が (7 0) とき、成り立つ。

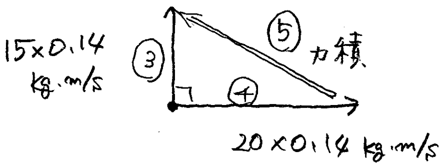
○運動量保存則は、(8 その方向に働く力) が (9 内力のみの) とき、成り立つ。

例り です．

3 速さ 20m/s で水平に飛んできた質量 0.14kg のボールをバットで打つと，ボールは，90°上向きに速さ 15m/s で飛んでいった。



(1)このとき，ボールがバットから受けた力積の大きさを求めよ。



左図より、$\frac{5}{3} \times 15 \times 0.14$

$= 3.5 \, N\cdot s$

(2)ボールが受けた平均の力の大きさが 50N、瞬間的な最大値は 200N であることがわかった。このとき、ボールとバットの接触時間はいくらか。

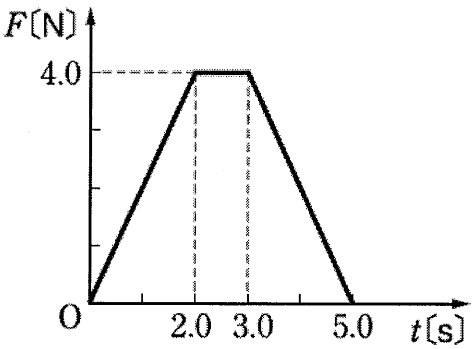
こちらを $\bar{f}$ とすると、

$I = \bar{f}\Delta t$ より、$\Delta t = \frac{I}{\bar{f}} = \frac{3.5}{50} = 0.070 \, s$

3 質量3.0kgの物体がx軸上を正の向きに5.0m/sの速さで進んできて，原点を通過した瞬間から，時間の経過とともに右図のように変化する力がx軸の正の向きに加わった。

(1) 0〜5.0秒の間に物体が力から受けた力積の大きさIは何N·sか。

(2) t=5.0sのときの物体の速度v'は何m/sか。



(1) F-tグラフの面積を考えて、力積を求める

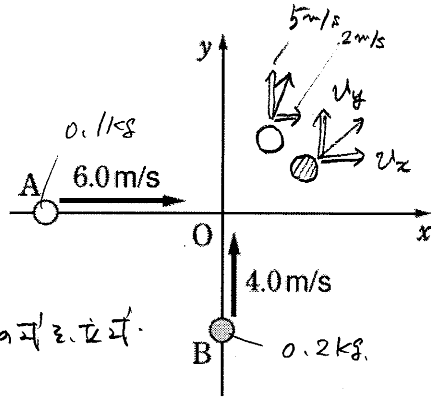
$(5+1)\times 4\times\frac{1}{2}=12$ (N·s)

(2) 運動量変化＝力積であり、求める速度をvとして

$3\times v-3\times 5=12$

$v=9.0$ (m/s)

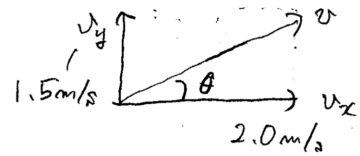
4 なめらかな水平面のx軸上を正の向きに6.0m/sの速さで進んでいた質量0.10kgの小球Aと，y軸上を正の向きに4.0m/sの速さで進んでいた質量0.20kgの小球Bが原点Oで衝突した。衝突後のAの速度のx成分が2.0m/s，y成分が5.0m/sであるとすると，Bはどのような方向へ速さ何m/sで進んだか。衝突後のBの速度の向きは，x軸となす角をθとするときの$\tan\theta$の値で答えよ。



x方向とy方向について、それぞれ運動量保存の式を立式

x: $0.1\times 6=0.1\times 2+0.2v_x$ ⇒ $v_x=2.0$m/s

y: $0.2\times 4=0.1\times 5+0.2v_y$ ⇒ $v_y=1.5$m/s



左図より $v=2.5$m/s

$\tan\theta=\frac{1.5}{2.0}=0.75$

1 (1)$ma=F$ (2)$\frac{v_2-v_1}{\Delta t}$ (3)FΔt (4)運動量 (5)力積

2 (1)非保存力のする仕事が0のとき 外力が働かないとき

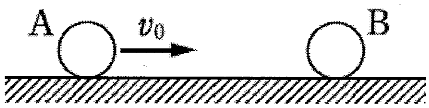
3 (1)12N・s (2) 9.0m/s 4 (1)2.5m/s $\tan\theta=0.75$の方向

5 (1)$\frac{1}{2}=-\frac{v-V}{v_0-0}$ (2)運動量・$mv_0=mv+MV$ (3)$v_A=\frac{(2m-M)v_0}{2(M+m)}$ $v_B=\frac{3mv_0}{2(M+m)}$ (4)$5/16\ mv_0^2$だけ減少する。

(5)$v_A=\frac{(m-M)v_0}{(M+m)}$ $v_B=\frac{2mv_0}{(M+m)}$ (6)M＞m (7) 0

6 (1)0 ,v_1 ,v_2 (2)ともに$v_0/3$ (3) $v=-v_0/3$ $V=2v_0/3$

5 なめらかな水平面上で静止している質量 m の小球 B に，質量 M の小球 A を速さ v_0 で衝突させる。衝突後、小球 A は速度 v、小球 B は速度 V で運動した。図の右向きを正の向きとする。



【A】衝突の反発係数が 1/2 の場合について，考えてみよう。

(1)衝突前後の反発係数に関する関係式を立式しなさい。

$$\frac{1}{2} = -\frac{v-V}{v_0-0} \qquad v-V = -\frac{v_0}{2} \quad -①$$

(2)この現象について保存するものを明らかにして、保存則に関する式を立式しなさい。

$$mv_0 = mv + MV \quad -②$$

こんな風に加減法がおすすめ.

(3)衝突後の小球 A の速度 v と小球 B の速度 V を求めよ。

①×m と ② より

$$mv - mV = -\frac{m}{2}v_0$$
$$-)\ mv + MV = mv_0$$
$$(M+m)V = \frac{3}{2}mv_0$$
$$V = \frac{3mv_0}{2(M+m)}$$

①×M と ② より

$$Mv - MV = -\frac{M}{2}v_0$$
$$+)\ mv + MV = mv_0$$
$$(M+m)v = \frac{2m-M}{2}v_0$$
$$v = \frac{2m-M}{2(M+m)}v_0$$

(4) このとき、衝突前後での力学的エネルギーは保存するか、減少するか、増加するか。簡単のために、$M=m$ として力学的エネルギーの変化量を計算せよ。

M=mのとき.

$$v = \frac{2m-m}{2(m+m)} = \frac{1}{4}v_0$$
$$V = \frac{3}{4}v_0$$

運動エネルギーを比べればよく.

あと　　さき

$$\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{4}v_0\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{3}{4}v_0\right)^2\right) - \frac{1}{2}mv_0^2$$
$$= \frac{10}{32}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{6}{32}mv_0^2 = -\frac{3}{16}mv_0^2$$

$\frac{3}{16}mv_0^2$ 減少した。

【B】衝突が弾性衝突の場合について考えよう。

(5)衝突後の小球 A の速度 v と小球 B の速度 V を求めよ。

e=1 より.

$$1 = -\frac{v-V}{v_0-0}$$
$$v - V = -v_0 \quad -①'$$

①'×m

$$mv - mV = -mv_0$$

そのまま ②

$$-)\ mv + MV = mv_0$$
$$V = \frac{2mv_0}{M+m}$$

①'×M

$$Mv - MV = -Mv_0$$

②

$$+)\ mv + MV = mv_0$$
$$v = \frac{m-M}{(M+m)}v_0$$

(6)小球 A が、衝突後図の左方向に進む条件を答えよ。

$v<0$ であればいいので， $\frac{(m-M)v_0}{M+m} < 0 \Leftrightarrow m-M<0$ 　 $M>m$

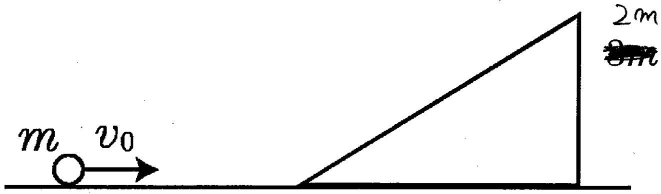
(7)衝突前後での力学的エネルギーの変化量を求めよ。

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{m-M}{M+m}v_0\right)^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{2m}{M+m}v_0\right)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$
$$= \frac{m^3 - 2m^2M + mM^2 + 4m^2M}{2(M+m)^2}v_0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}\frac{m\cancel{(M+m)^2}}{\cancel{(M+m)^2}}v_0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = 0$$

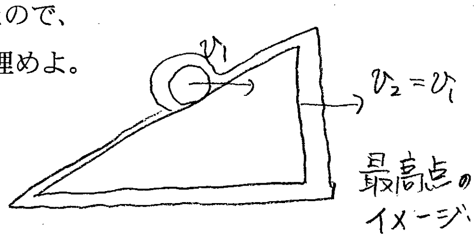
つまり,保存する.

このことから,力学的エネルギーは $e=1$ で保存, $e \neq 1$ で減少する!

6 図のように，なめらかな水平面上に，質量 ~~3m~~ 2m のなめらかな斜面をもつ三角台を置き，この三角台に向けて質量 m の小物体を速さ v_0 で水平面からすべらせた。小物体は，三角台の斜面をすべり上がり，最高点に達した後，斜面をすべり降り，再び水平面に達した。重力加速度を g として，次の問に答えなさい。ただし，はじめの小物体の速度の向きを正とすること。



(1)小物体が最高点に達したときの小物体の水平面に対する速度を v_1、三角台の速度を v_2 とする。このとき、~~小物体~~三角台から見た~~小球 2~~小物体の相対速度は（a 0 ）なので、（b v_1 ）－（c v_2 ）＝（a 0）が成立する。（　　）を埋めよ。



よって、$v_1 = v_2$

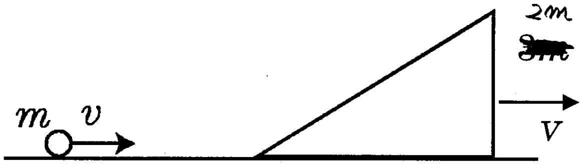
(2)v_1、v_2 を求めよ。

運動量保存則より，

$$mv_0 = (m + 2m)v_1$$

$$v_1 = \frac{1}{3}v_0 \quad , \quad v_2 = v_1 = \frac{1}{3}v_0$$

(3)小物体が再び水平面に達したときの，水平面に対する小物体の速度 v、三角台の水平面に対する速度 V をそれぞれ求めなさい。



運動量保存則より，

$$mv_0 = mv + 2mV \quad -①$$

$$\Leftrightarrow v = v_0 - 2V \quad -①'$$

○力学的エネルギー保存則から考えると，

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot 2mV^2 \quad -②$$

$$v_0^2 = v^2 + 2V^2 \quad -②'$$

①'を，②'に代入して，

$$v_0^2 = v_0^2 - 4v_0V + 4V^2 + 2V^2$$

$$\Leftrightarrow 6V^2 - 4v_0V = 0$$

$$V\left(V - \frac{2}{3}v_0\right) = 0 \quad V \neq 0 \text{ より}$$

$$V = \frac{2}{3}v_0 . \quad ①' \text{より} \ v = -\frac{1}{3}v_0$$

力学的エネルギーが保存するので，

○反発係数1の衝突と考えれば，

$$1 = -\frac{v - V}{v_0 - 0}$$

$$V - v = v_0 \quad -③$$

①'と③より

$$\begin{array}{rl} & 2V + v = v_0 \\ +) & V - v = v_0 \\ \hline & 3V = 2v_0 \end{array} \qquad V = \frac{2}{3}v_0$$

①'より $v = v_0 - 2V = -\frac{1}{3}v_0$

1次式なので楽です。