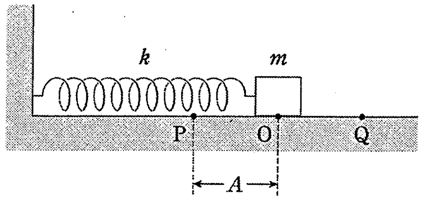
単振動の単元テストのために。

（文責：樋掛）

意図は表題の通り。4 月 20 日～22 日の間に解いて確認し、4/23(月)単元テストに臨むことを強く推奨する。

問 1

図のように，ばね定数 k の軽いばねをなめらかで水平な台上に置き，一端を壁につけ，他端には質量 m の物体をつなぐ。点 O から左向きに距離 A はなれた点 P までばねを縮め，手をはなすと，物体は点 O を中心とする PQ 間で単振動をした。次の各問に答えよ。



(1) 点 P で手を離したとき，物体にはたらく水平方向の力の大きさはいくらか。

(2) 物体の変位を x として、運動方程式を立式せよ。

(3) 一般に単振動の加速度 a は変位 x と角振動数 ω を用いてどのように書けるか。

(4) 角振動数 ω はいくらか。

(5) 手を離すと，物体は PQ 間を単振動し始めた。点 O での速さはいくらか。

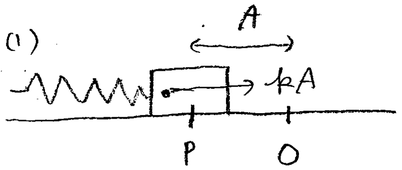
(6) OQ の長さはいくらか。

(7) 点 P から Q まで物体が進む時間を求めよ。

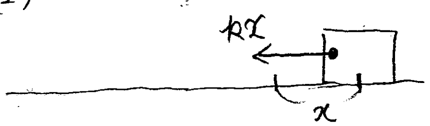
(8) 原点 O を基準とした変位 x を t の関数として表せ。ただし、右向きを正の方向とする。

(9) 速度 v を t の関数として表し、グラフを描け。

(1)



(2)



(3)(4) $a=-\omega^2 x$ より，

運動方程式は

$m(-\omega^2 x) = -kx$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

(5) 力学的エネルギー保存則より O での速さ v_0 として，

$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$

$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\cdot A$

(6) 力学的エネルギー保存則より

$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kA'^2$

$A' = A$

(7) (4)より，

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

(8) 振幅 A．

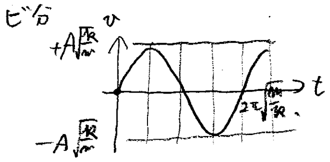
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ そして，−cos 型

よって，

$x(t) = -A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t$

(9) $\frac{dx(t)}{dt} = A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t$

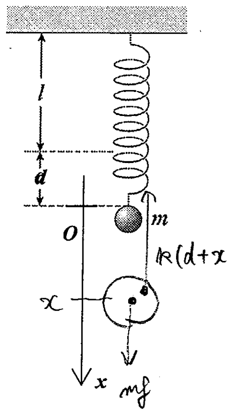
ビ分



☞水平ばね振り子についてはばねの数を２個、３個…と増やして（一見）難しくする出題例がみられるが、変位が$+x$ の地点に物体を描き、ばねの数だけ弾性力を記入（伸び縮み、向きに注意）した上で運動方程式を立てる…という基本方針を押さえておけば問題なく解ける。

問 2

自然の長さ l の軽いばねの一端を天井に固定し，他端に質量 m の小球をつるすと，ばねが d の長さだけ伸びて静止した。ここで，小球を鉛直方向にもち上げ，ばねの自然の長さが l となるようにして急に手をはなすと，小球は単振動をした。重力加速度の大きさを g とする。



(1)ばね定数 k を m, g, d を用いて表せ。　力のつりあいから，$mg = kd$　$k = \frac{mg}{d}$

(2)この場合の振動中心について正しいものを全て選択せよ

(a)速さが最大の点である　振動中心は常に v が最大．

(b)ばねが自然長となる点である　のびが d だから ✕

(c)力のつりあいの位置と等しい　振動中心は常に合力 0

(d)加速度が 0 である。　振動中心は常に F＝0

図より

つりあいの位置を原点 O として、鉛直下向きに x 軸をとる。

(3) この単振動の運動方程式について、次の空欄に適する文字式を解答用紙に記入せよ。

物体にはたらく力は重力とばねの弾性力であるから、m, g, k, d, x を用いて、

ma=（　ア　）－（　イ　）　$mg - k(d+x)$

と立式できる。また、前問(3)と(1)より、角速度 ω と m, g, d, x を用いて、

m(　ウ　) ＝ (　エ　)

と整理することができる。

$mg - \frac{mg}{d}\times d - \frac{mg}{d}\cdot x = -\frac{mg}{d}\cdot x$ (右辺) はこうなる

$m(-\omega^2 x) = -\frac{mg}{d}\cdot x$

(4) 単振動の周期はいくらか。

(5) 手を離したあと初めて原点を通過するまでの時間はいくらか。

(6) 振動の中心を通過するとき，小球の速さはいくらか。

(4) $\omega = \sqrt{\frac{g}{d}}$　$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}$

(5) $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{d}{g}}$

O ↓ $\frac{T}{4}$ O ↓ O

(6) ◎ 単振動のエネルギーで考えると，

$0 + \frac{1}{2}kl^2 = \frac{1}{2}mv^2 + 0$

(はなす所)　(中心)

$v = \sqrt{\frac{k}{m}}\cdot l = \sqrt{gd}$

◎ 力学的エネルギーで考えると，

$0+0+0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgd - \frac{1}{2}kd^2$

$v^2 = 2gd - \frac{k}{m}d^2 = 2gd - gd = gd \iff v = \sqrt{gd}$

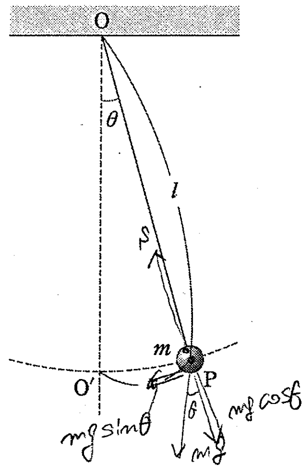
☞鉛直ばね振り子については、原点を自然長にとる場合と、振動中心にとる場合がある。いずれにしても、(3)のような流れで、運動方程式を立式し、−▲x か−▲(x−○)といった形に整理することで，ω を導出する。また、(6)のように力学的エネルギー保存則を立式する場合に、従来のように mgh を考えるか、単振動のエネルギーで考えるかを明確にして２つを混同しないことが重要である。

問3

次の文の(　　)に入る適切な式，語句を答えよ。

図のように，糸の長さが l，おもりの質量が m の単振り子がある。いま，糸は，鉛直線OO'から小さな角 θ だけ傾いている。このとき，おもりが受けている力は，(ア 重力)と糸の張力である。重力加速度の大きさを g，角 θ の増加する向きを正にとると，運動方向の力の成分 F は，F＝(イ)である。角 θ は十分に小さいので，円弧O'Pの長さを x とすると，$\sin\theta \fallingdotseq \frac{x}{l}$ とみなすことができ，近似的に $F\fallingdotseq$(ウ)となる。これは物体の運動が単振動するとみなせることを意味する。

$$F = -mg\sin\theta = -\frac{mg}{l}\cdot x$$



一般に，質量 m の質点が，角振動数 ω で単振動をしているとき，変位を x とすると，復元力 F は，F＝(エ)と書くことができる。

また、単振動の周期 T と角振動数 ω の関係は，T＝(オ)と表される。

$m(-\omega^2 x)$　　　$T=\frac{2\pi}{\omega}$

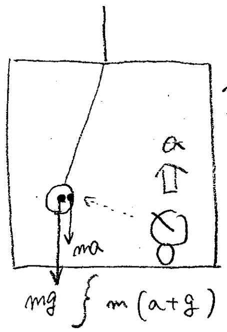
これらのことから、再度図のような単振り子について考えると、(ウ)と(エ)から角振動数 ω を導出できる。それをもとに周期 T を考えると，T＝(カ)となる。

この振り子を一定の加速度 $a(>0)$で鉛直方向に上昇するエレベーターの天井から吊して振動させると、単振動した。この時の周期は T'＝(キ)となり、エレベーターが静止しているときに比べて短くなる。

$$m(-\omega^2 x) = -\frac{mg}{l}\cdot x$$

$$\Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



見かけの重力加速度の大きさが、

$g' = a+g$ になる。よって

(カ)の $g \to a+g$ として $T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$

☞ばね以外の単振動現象として取り上げられるのが振り子と浮きである。いずれも働く力が（整理することで）$-\blacktriangle x$ という形になることを導出できるようにしておきたい。ポイントは浮きについては浮力を正確に記述できるかどうか、振り子については運動に沿う方向の力の成分を考えた上で、θ が小さいとして近似の考え方を適用できるかである。是非、(ｱ)～(ｳ)の論述をよどみなく他者に説明できることを確認した上でテストに臨んでほしい。

☞「復元力は，m,ω,x を使って $F=-m\omega^2 x$ と書くことができる。」という問い（エ）は、単振動の運動方程式の左辺がどう書けるかの確認というくらいの認識で良い。間違ってもそのような新たな力が存在しているかのような誤解を持たないようにしてほしい。

略解　詳解は本日夕方までに公開 ☞

問1

(1)kA　(2)$ma=-kx$　(3)$-\omega^2 x$　(4)$\sqrt{\frac{k}{m}}$　(5) $A\sqrt{\frac{k}{m}}$　(6)A　(7) $\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

(8) $x(t)=-A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$　(9) $v(t)=A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$ グラフ略

問2

(1)$\frac{mg}{d}$　(2)(a)(c)(d)　(3)(ア)mg　(イ)$k(d+x)$　(ウ)$-m\omega^2 x$　(エ)$-\frac{mg}{d}x$

(4) $2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}$　(5) $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{d}{g}}$　(6) $\sqrt{gd}$

問3

(ア)重力　(イ)$-mg\sin\theta$　(ウ)$-\frac{mg}{l}x$　(エ) $-m\omega^2 x$　(オ) $\frac{2\pi}{\omega}$　(カ) $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

(キ) $2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$

☞ 教科書は微分積分を避けているためか全体的に記述が曖昧な部分があり、重要事項とそうでないものの区別がつきにくい。また、「復元力」という言葉が多用によって、特に「復元力」についての理解が不十分である学習者にとってはかえって誤解を深めてしまう可能性がある。単振動の問題は、ひとりで教科書の読解を試みるより分かっていそうな人に質問してみることを強く勧める。

① 単振動チェックポイント

□水平ばね振り子において、物体に働く力を記述し、運動方程式から角振動数 ω を導出できる
□水平ばね振り子について力学的エネルギー保存則を立てる事ができる
□鉛直ばね振り子において、振動中心が原点のとき、変位 x での物体に働く力を記述できる
□鉛直ばね振り子において、振動中心が原点でなくても、変位 x で物体に働く力を記述できる
□振動中心が原点でないとき、運動方程式を立てて、角振動数 ω を導出できる
□鉛直ばね振り子において、「力学的エネルギー保存則」を立てることができる
□鉛直ばね振り子において、「単振動のエネルギー保存則」を立てることができる
□単振り子について、近似を用いて変位 x のときに物体に働く力を記述できる
□浮力など、ばね以外を用いた単振動について、運動方程式や単振動のエネルギー保存側が立てられる