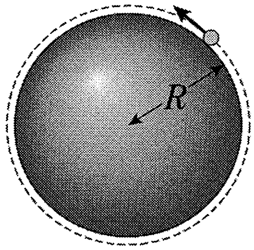
万有引力：単元テスト（5/2）に向けての問題

（文責：樋掛）

意図は表題の通り。テスト前に解いて確認し、考査に臨むことを強く推奨



問 1 地表近くを円軌道を描いてまわる質量 m の人工衛星がある。地球の半径を R ，地球の質量を M 万有引力定数を G として次の問に答えよ。

(1)　この人工衛星に働く万有引力の大きさはいくらか。M,m,R,G を用いて表せ。

$$F = \frac{GMm}{R^2}$$

(2)　地表付近では万有引力の大きさと重力の大きさが等しい（つまり、重力の正体は万有引力）と見なすことができる。このとき、重力加速度の大きさ g を G,M,R を用いて表せ。

$$\underbrace{mg}_{\text{重力}} = \underbrace{\frac{GMm}{R^2}}_{\text{万有引力}} \qquad g = \frac{GM}{R^2}$$

(3)　人工衛星は速さ v で等速円運動する。人工衛星について、運動方程式を立式せよ。ただし、g を用いたものと G を用いたものとの両方を立式すること。

$$m\frac{v^2}{R} = mg \qquad m\frac{v^2}{R} = \frac{GMm}{R^2}$$

(4)　このときの人工衛星の速さ(第 1 宇宙速度という)はいくらか。ただし、g を用いたものと G を用いたもの両方を導出すること。

$$v = \sqrt{gR} \qquad v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

(5)　人工衛星の周期はいくらか。g,R を用いて解答せよ。

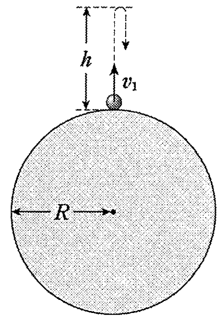
$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{gR}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

(6)　g＝9.8 〔m/s^2〕，R＝6.4×10^6 〔m〕として，人工衛星の速さを計算せよ。

$$v = \sqrt{9.8\times6.4\times10^6} = \sqrt{98\times64\times10^4} = \sqrt{2}\times7\times8\times10^2$$
$$= 56\sqrt{2}\times10^2 = 7.9\times10^3\ \mathrm{m/s}$$

(1) $\dfrac{GMm}{R^2}$　(2) $\dfrac{GM}{R^2}$　(3) $m\dfrac{v^2}{R} = \dfrac{GMm}{R^2}$　$m\dfrac{v^2}{R} = mg$　(4) $\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$，$\sqrt{gR}$

(5) $2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$　(6) 7.9×10^3 m/s



問 2 地球の表面から，ある初速度で鉛直上方に物体を打ち上げる。地球の半径を R，地表での重力加速度の大きさを g とする。打ち上げた物体が，地表から高さ h の点まで上昇したあと，地面に向かって落ち始めた。

(1)このときの打ち上げの初速 v_1 を次のように求めるとき、空欄に適することばや文字式を入れよ。

このときの物体の運動について（ア 力学的エネルギー）が保存することを利用する。物体が地表から打ち上げられた瞬間の(ア)を考えると（イ $\frac{1}{2}mv_1^2 - gRm$ ）であり、h に達したときの（ア）は（ウ $-\frac{gR^2m}{R+h}$ ）である。

（イ）＝（ウ）であるから、v_1 は（エ $v_1=\sqrt{\frac{2gRh}{R+h}}$ ）と考えられる。

ウ、$0-\frac{GMm}{R+h}$

$GM=gR^2$

$= -\frac{gR^2m}{R+h}$

$\frac{1}{2}mv_1^2 - gRm = -\frac{gR^2m}{R+h}$

$v_1^2 = 2gR\left(\frac{R+h}{R+h} - \frac{R}{R+h}\right) = \frac{2gRh}{R+h}$

Gでなくgをつかうから、

$mg = \frac{GMm}{R^2}$

$g = \frac{GM}{R^2}$ これを、パッと

$\Leftrightarrow \frac{GM}{R} = gR$

(2) 打ち上げた物体が，無限遠方まで飛び去るようにしたい。そのために必要な，打ち上げの最小の初速(第 2 宇宙速度)v_2 を(エ)の結果を用いて求めよ。

エの、$h\to\infty$ とすればよく.....

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gR}{\frac{R}{h}+1}} \qquad v_2 = \lim_{h\to\infty} v_1 = \sqrt{\frac{2gR}{\frac{R}{h}+1}} = \sqrt{2gR}$$

高さが、無限になるときの v_1 は・・・

(3) （結局は同じ事だが）第 2 宇宙速度を地表と無限遠点での力学的エネルギーを比較することで考えてみよう。

$-\frac{GMm}{R} = -gRm$

いま、物体を地表から速さ u で打ち上げられたとしよう。このとき物体がもつ力学的エネルギーのうち、運動エネルギーは（ア $\frac{1}{2}mu^2$ ）万有引力による位置エネルギーは（イ $-gRm$ ）である。u がちょうど第２宇宙速度であったとすると、無限遠点に到達したときに、物体の速さは 0 になるので、このとき、運動エネルギーは（ウ 0 ）万有引力による位置エネルギーは（エ 0 ）である。よって力学的エネルギー保存則は（ア）＋（イ）＝（ウ）＋（エ）

$\lim_{r\to\infty} -\frac{GMm}{r}$

となり、これを計算することで、u ＝ （オ $\sqrt{2gR}$ ）と計算できる。

$\frac{1}{2}mu^2 - gRm = 0$

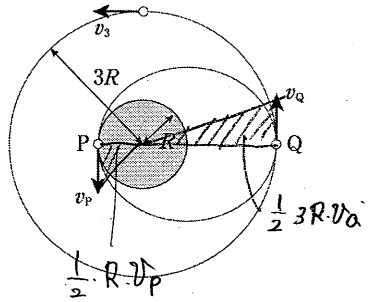
$u = \sqrt{2gR}$

(1) ア:力学的エネルギー　イ:$\frac{1}{2}mv_1^2 - gRm$　ウ:$-\frac{gR^2m}{R+h}$　エ:$\sqrt{\frac{2gRh}{R+h}}$　(2) $\sqrt{2gR}$

(3)ア:$\frac{1}{2}mu^2$　イ: $-gRm$　ウ:0　エ:0　オ:$\sqrt{2gR}$

問 3 半径 R, 質量 M の地球から，地球の中心から距離 $3R$ の円軌道に，質量 m の人工衛星を 2 段階の操作で打ち上げようと思う。万有引力定数を G とする。

まず，地球を 1 つの焦点とし，点 P で地表に，点 Q で半径 $3R$ の円軌道に接する楕円軌道にのせる。次に，点 Q で円軌道に移行させる。



(1)楕円軌道上を動くときの点 P での速さ v_P, 点 Q での速さ v_Q について考える。
点 P での物体の力学的エネルギーは(ア $\frac{1}{2}mv_P^2-\frac{GMm}{R}$)点 Q では(イ $\frac{1}{2}mv_Q^2-\frac{GMm}{3R}$)である。力学的エネルギーは保存するため、(ア)=(イ)の関係がある。…①
P 点での面積速度は（ウ $\frac{1}{2}Rv_P$ ）Q 点では（エ $\frac{1}{2}\cdot 3Rv_Q$ ）である。(ウ)=(エ)であるから、v_P を v_Q で表すと、（オ $3v_Q$ ）である。…②
①,②から、v_P と v_Q を G,M,R を用いて表すと、v_Q は（カ　　　）さらに v_P は（キ　　　）である。

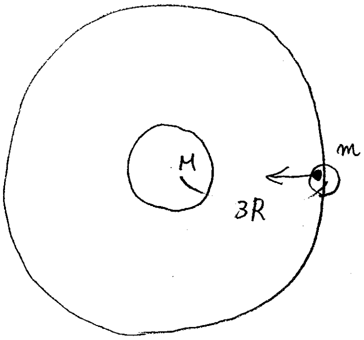
$$\frac{1}{2}Rv_P=\frac{1}{2}\cdot 3Rv_Q$$
$$v_P=3v_Q$$

①と、②より.

$$\frac{1}{2}m(3v_Q)^2-\frac{GMm}{R}=\frac{1}{2}mv_Q^2-\frac{GMm}{3R}$$
$$8v_Q^2=2\times\frac{2}{3}\cdot\frac{GM}{R}\iff v_Q=\underline{\sqrt{\frac{GM}{6R}}}\ カ$$
$$v_P=3v_Q=\underline{3\sqrt{\frac{GM}{6R}}}\ キ.$$

(2)楕円軌道から円軌道に移行するためには Q 点で物体の速度を変化させる必要がある。加速させるべきか減速させるべきかを検討せよ。(Hint: v_3 は計算することができる。)

[補足]を、よく参照しておくこと!! Quick Response で、加速!!といいたい。



運動方程式から、
速さ v_3 をもとめると、

$$m\cdot\frac{v_3^2}{3R}=\frac{GMm}{(3R)^2}\iff v_3=\underline{\sqrt{\frac{GM}{3R}}}\,''$$

$$\underset{\sqrt{\frac{GM}{6R}}}{v_Q}<\underset{\sqrt{\frac{GM}{3R}}}{v_3}$$ より、加速させる。

(1)ｱ: $\dfrac{1}{2}mv_P^2-\dfrac{GMm}{R}$　ｲ: $\dfrac{1}{2}mv_Q^2-\dfrac{GMm}{3R}$　ｳ: $\dfrac{1}{2}Rv_P$　ｴ: $\dfrac{3}{2}Rv_Q$

ｵ: $3v_Q$　ｶ: $\sqrt{\dfrac{GM}{6R}}$　ｷ: $3\sqrt{\dfrac{GM}{6R}}$

(2)図の円軌道を運動する速さを運動方程式から求めると、$\sqrt{\dfrac{GM}{3R}}$ であるから、

v_Q と比較して、「加速させるべき」であることがわかる。

補足

(1)について

P 点は近点、Q 点は遠点と呼ばれる。これらの点は面積速度の計算が容易である。

力学的エネルギー保存則（①）には v_P, v_Q という 2 つの未知数が含まれるため、このままでは解けない。

面積速度に注目することで、v_P, v_Q に関する条件式を立式し（②）、代入することで未知数を減らす。

(2)について

円運動について運動方程式を立てれば、その速さ v_3 を求めることは難しくない。したがって、v_3 を求めて v_Q と比較することが王道的解法であるが、そもそも楕円軌道の状態から少しでも減速すれば、物体は P 点を通過できなくなり地球に衝突するイメージが持てているだろうか。そして、徐々に加速すると楕円は徐々に円に近づき、円運動を経て今度は Q を近点とする楕円軌道となり、そのうち物体は無限遠点に到達する…というイメージを合わせて持っておきたい

チェックポイント

□万有引力の式をかける

□円軌道について、運動方程式を立てて、等速円運動する速さを導出できる

□力学的エネルギー保存則（万有引力の位置エネルギーを使って）を立てる事ができる

□第 1 宇宙速度とは何かが分かっている

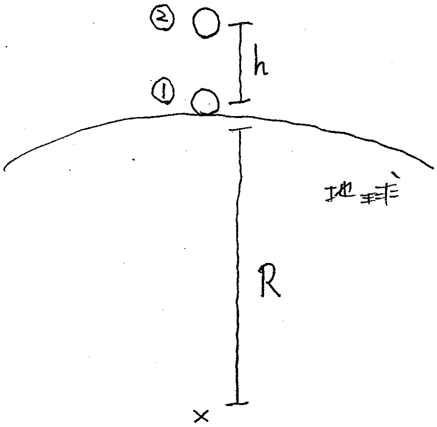
□無限遠点について力学的エネルギー保存則を考察し、第 2 宇宙速度を導出できる

□面積速度とは何かが分かっている

□面積速度一定の法則と力学的エネルギー保存則から、与えられた楕円軌道の遠点と近点の速さを導出できる

□ケプラーの第 3 法則から、楕円軌道の周期を導出できる

余談 地表面から、hだけ高くなったとき、
位置エネルギーが、どのように変わるのか、⇒ mgh なんだけど、
あえて、万有引力のエネルギーで、
考えてみよう。



無限遠点を基準にとると
位置エネルギーは、

$$U_{①} = -\frac{GMm}{R}$$

$$U_{②} = -\frac{GMm}{(R+h)}$$

Rに比べて、hが、小さいとして、ヤングのときにつかった

$$(1+x)^n \overset{x \ll 1}{\fallingdotseq} (1+nx)$$ の近似式をつかう。

$$U_{②} = -\frac{GMm}{R\left(1+\frac{h}{R}\right)} = -\frac{GMm}{R}\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-1}$$

$\frac{h}{R} \ll 1$ より、

$$\fallingdotseq -\frac{GMm}{R}\left(1-\frac{h}{R}\right)$$

$$= -\frac{GMm}{R} + \underbrace{\boxed{\frac{GMm}{R^2}}}_{mg}h = -\frac{GMm}{R} + mgh$$

よって、

$$U_{②} - U_{①} \fallingdotseq mgh$$ であり、

これだけ、大きい。

Rに比べてhが十分小さいとき、

重力による位置エネルギーが、mgh とかけることが分かる。