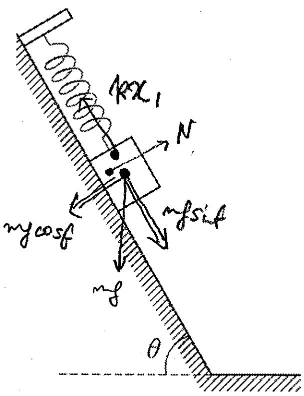
プラスα問題② ★★★ ⑧⑨⑬

上端を固定したばねで物体が斜面に接してつり下げられている。物体の質量を m，斜面の傾角を θ，ばね定数を k，重力加速度の大きさを g とする。



〔A〕斜面がなめらかな場合について，次の(1)～(3)に答えよ。

(1) 物体が静止しているときのばねの伸び x_1 を求めよ。

(2) ばねが自然の長さの状態で物体をはなした場合，ばねの伸びが(1)の x_1 になるときの物体の速さ v_1 を求めよ。

(3) 前問(2)の場合，物体が最下点に到達したときのばねの伸び x_2 を求めよ。

〔B〕次に，物体と斜面の間に摩擦がある場合について，次の(4)～(6)に答えよ。ただし，静止摩擦係数を μ，動摩擦係数を μ'，$\mu' < \mu < \tan\theta$ とする。

(4) 斜面にそって物体を手で動かし，静かに手を離すとき，物体がすべらずに静止するかどうかを調べたところ，ばねの伸びが最小値 x_3 と最大値 x_4 の範囲にあるとき，物体を静止させることができた。x_3 と x_4 を求めよ。

(5) ばねが自然の長さの状態で物体をはなした場合，物体が最下点に到達したときのばねの伸び x_5 を求めよ。

(6) 物体が最下点に到達した後，再び斜面を上昇するか，静止するかは，静止摩擦係数や動摩擦係数などの条件による。物体が再び上昇する条件を θ, μ, μ' を用いて表せ。

[A](1) 力のつり合いより。

$kx_1 = mg\sin\theta$

$x_1 = \frac{mg}{k}\sin\theta$

(2) 力学的エネルギー保存則より。

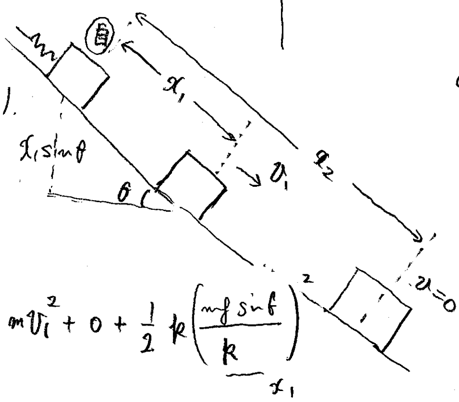
(重力による位置エネルギーの基準を、x_1の点において)

自然長

$$0 + mg\underbrace{\frac{mg}{k}\sin\theta}_{x_1}\sin\theta + 0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + 0 + \frac{1}{2}k\Big(\underbrace{\frac{mg\sin\theta}{k}}_{x_1}\Big)^2$$

$v_1^2 = \frac{m}{k}g^2\sin^2\theta$

$v_1 = \sqrt{\frac{m}{k}}\,g\sin\theta$



(3) 力学的エネルギー保存則より。

重力による位置エネルギーの基準を、x_2の点において、

自　　　　x_2の点

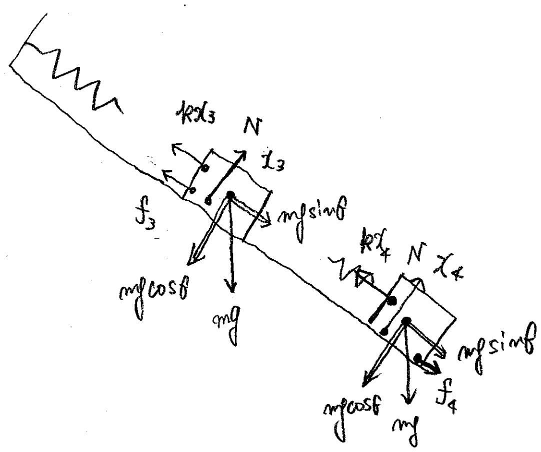
$0 + mgx_2\sin\theta + 0 = 0 + 0 + \frac{1}{2}kx_2^2$

$x_2 = \frac{2mg}{k}\sin\theta$

(1) $\frac{mg}{k}\sin\theta$　(2) $\sqrt{\frac{m}{k}}g\sin\theta$　(3) $\frac{2mg}{k}\sin\theta$　(4) $x_3 = \frac{mg}{k}(\sin\theta - \mu\cos\theta)$　$x_4 = \frac{mg}{k}(\sin\theta + \mu\cos\theta)$

(5) $\frac{2mg}{k}(\sin\theta - \mu'\cos\theta)$　(6) $\tan\theta > \mu + 2\mu'$

(4)



x_3点での静止摩擦力 f_3 は、力のつり合いより

$$+f_3 + kx_3 - mg\sin\theta = 0$$

$$f_3 = mg\sin\theta - kx_3 = \underbrace{\mu mg\cos\theta}_{\text{これが、最大摩擦力に等しいので、}}$$

$$x_3 = \frac{mg(\sin\theta - \mu\cos\theta)}{k}$$ //

x_4点での静止摩擦力 f_4 は、力のつり合いより

$$kx_4 - mg\sin\theta - f_4 = 0$$

$$f_4 = kx_4 - mg\sin\theta = \mu mg\cos\theta$$

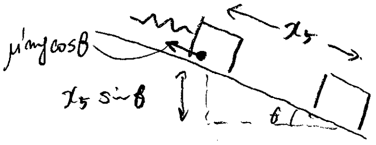
これが、最大摩擦力に等しいので、

$$x_4 = \frac{mg(\sin\theta + \mu\cos\theta)}{k}$$ //

(5) 力学的エネルギーと、仕事の関係から。

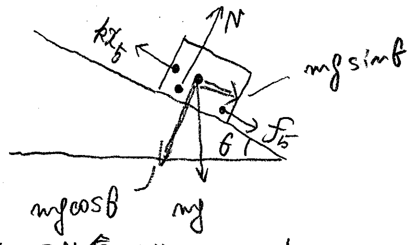
重力による位置エネルギーの基準を、x_5の点にとって、

$$\underbrace{\frac{1}{2}kx_5^2}_{x_5\text{のエネルギー}} - \underbrace{mgx_5\sin\theta}_{\text{自然長でのエネルギー}} = \underbrace{-\mu' mgx_5\cos\theta}_{\text{動摩擦力の仕事}}$$



$$x_5 = \frac{2mg(\sin\theta - \mu'\cos\theta)}{k}$$ //

(6) 最下点（x_5の点）において、



力のつり合いより　(5)を代入

$$f_5 = kx_5 - mg\sin\theta$$

$$= 2mg\sin\theta - 2mg\mu'\cos\theta - mg\sin\theta$$

$$= mg\sin\theta - 2mg\mu'\cos\theta$$

再び上昇するとき　$f_5 > \overset{\text{最大摩擦力}}{\mu N} = \mu mg\cos\theta$

$$mg\sin\theta - 2mg\mu'\cos\theta > \mu mg\cos\theta$$　$\div mg\cos\theta$

$$\tan\theta - 2\mu' > \mu$$

$$\tan\theta > \mu + 2\mu'$$

※物理には運も臆病さも要りません。