 ★★★★★（2014　東京大学）

図 1−1 に示すように，水平から角度θをなすなめらかな斜面の下端に，ばね定数kのばねの一端が固定されている。斜面は点 A で水平面と交わっており，ばねの他端は自然長のとき点 A の位置にあるものとする。図 1−2 に示すように，質量mの小球をばねに押し付け，斜面に沿って距離xだけばねを縮めてから静かに手を離す。その後の小球の運動について，以下の設問に答えよ。ただし，重力加速度の大きさをgとする。また，小球の大きさとばねの質量は無視してよい。

(2) ▽ 力学的エネルギー保存則より.

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgx\sin\theta$$

$$v^2 = \frac{k}{m}x^2 - 2gx\sin\theta \quad —(i)$$

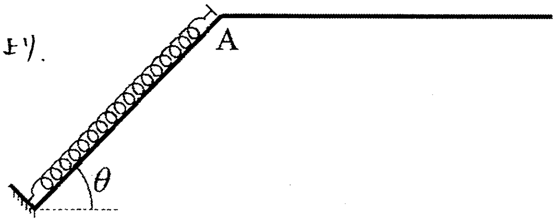


図 1—1

$$\frac{k}{m}x^2 - 2gx\sin\theta > 0$$

$x>0$ より.

$$\frac{k}{m}x > 2g\sin\theta$$

$$x > \frac{2mg\sin\theta}{k}$$

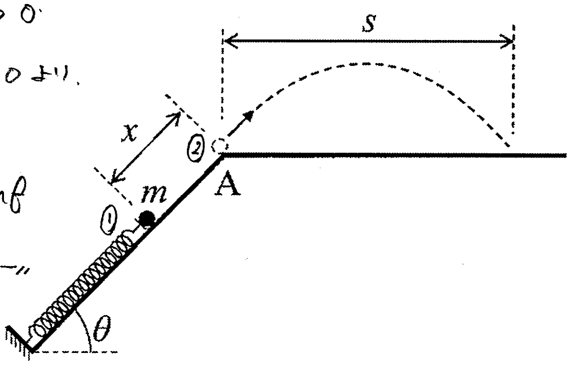
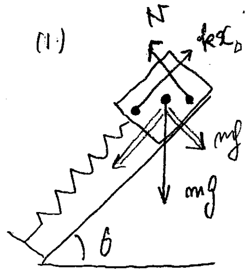


図 1—2

(1)



$kx_0 = mg\sin\theta$. $x_0 = \frac{mg\sin\theta}{k}$

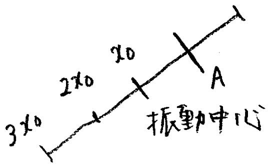
(1)　$x = x_0$ のとき，手を離しても小球は静止したままであった。このときのx_0を求めよ。

(2)　手を離したのち，小球が斜面から飛び出し水平面に投げ出されるためのxの条件を，k，m，g，θを用いて表せ。 Aに達したときの速度が、$v>0$であればよいので.

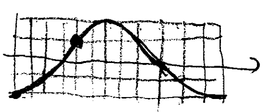
(3)　$x = 3x_0$ のとき，小球が動き出してから点 A に達するまでの時間を求めよ。

【この(3)だけは、今の段階では解けない問題です。なぜ解けないのかを考えてみましょう。】

$x = 3x_0 \rightarrow 0$ の運動が、等加速度運動ではないので、今は、解けません.
(はじめ)　(A点)　(単振動といいます)



$\frac{4}{12}$周期に相当するので、 $\frac{4}{12} \times 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2}{3}\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$



次に，(2)の条件が成立し小球が投げ出されたあとの運動を考える。小球は点Aから速さ v で投げ出されたのち，水平距離 s だけ離れたところに落下する。点Aでの速さが一定の場合は，$\theta = 45°$ のとき落下までの水平距離が最大になることが知られているが，今回の場合は，θ によって v が変わるため，s が最大となる条件は異なる可能性がある。以下の設問に答えよ。なお，必要であれば，表1－1の三角関数表を計算に利用してよい。

(4)

(2)の(i)式より，

$$v = \sqrt{\left(\frac{k}{m}x - 2g\sin\theta\right)x}$$

(5)

斜方投射を考えると，小球がAから水平面に達するのに要する時間 t_1 は，

$0 = v\sin\theta\, t_1 - \frac{1}{2}g t_1^2 \quad t_1 > 0$

$$t_1 = \frac{2v\sin\theta}{g}$$

表1－1

θ	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
$\sin\theta$	0.17	0.26	0.34	0.42	0.50	0.57	0.64	0.71
$\cos\theta$	0.98	0.97	0.94	0.91	0.87	0.82	0.77	0.71

θ	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°
$\sin\theta$	0.77	0.82	0.87	0.91	0.94	0.97	0.98
$\cos\theta$	0.64	0.57	0.50	0.42	0.34	0.26	0.17

$$s = v\cos\theta \cdot t_1 = \frac{v^2\sin 2\theta}{g} = \frac{kx}{mg}\left(x - \frac{2mg}{k}\sin\theta\right)\sin 2\theta \quad ②$$

$s(40°) = (1-0.64)\times 0.98 \fallingdotseq 0.35$
$s(35°) = (1-0.57)\times 0.94 \fallingdotseq 0.40$
$s(30°) = (1-0.50)\times 0.87 \fallingdotseq 0.44$
$s(25°) = (1-0.42)\times 0.77 \fallingdotseq 0.45$ ＊
$s(20°) = (1-0.34)\times 0.64 \fallingdotseq 0.42$

(4) v を x，k，m，g，θ を用いて表し，x が一定のとき，s が最大となる θ は45°より大きいか小さいか答えよ。

水平方向の $v_x = v\cos\theta = \underbrace{\sqrt{\left(\frac{k}{m}x - 2g\sin\theta\right)x}}_{\thetaが大きいと小さい。} \times \underbrace{\cos\theta}_{\thetaが大きいと小さい。}$

よって，45°よりも小さい角度で，s が最大となると考えられる。

(5) s を x，k，m，g，θ を用いて表せ。

(6) $x = \dfrac{2mg}{k}$ のとき，表1－1に示した角度の中から，s が最も大きくなる θ を選んで答えよ。

45°より小さい角度で，検証すると，…

②に x を代入して，$s_{(\theta)} = \dfrac{4mg}{k}\left(1 - \sin\theta\right)\sin 2\theta$

よって，$\theta = 25°$ で，最大となる。

(7) x を大きくしていくと，s が最大となる θ は何度に近づくか。表1－1に示した角度の中から選んで答えよ。

方針：②を変形して，$\dfrac{○}{x}$ の形をつくる。$\dfrac{○}{x}$ は，x を大きくすると，0に近づく。

$$s = ② = \frac{kx^2}{mg}\Bigl(1 - \underbrace{\frac{2mg}{kx}\sin\theta}_{この部分が，x\to大で，0に近づく。}\Bigr)\sin 2\theta \xrightarrow{xを大きくすると} \frac{kx^2}{mg}\sin 2\theta$$

これが最大となるのは，$\theta = 45°$ のときである。

(1) $x_0 = \dfrac{mg\sin\theta}{k}$ (2) $x > \dfrac{2mg\sin\theta}{k}$ (3) $\dfrac{2\pi}{3}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ (4) $v = \sqrt{\left(\dfrac{k}{m}x - 2g\sin\theta\right)x}$，小さい

(5) $s = \dfrac{\sin 2\theta}{g}\left(\dfrac{k}{m}x - 2g\sin\theta\right)x$ (6) $\theta = 25°$ (7) 45°