ブラスα問題　東京大学の入試問題から　2016 東京大学

図3−1のようにxy平面に広がる水面が，x軸を境界として水深が異なる2つの領域に分かれている。領域A($y>0$)における波の速さをV，領域B($y<0$)における波の速さを$\dfrac{V}{2}$とする。簡単のため，波の反射と屈折は境界で起こり，反射する際に波の位相は変化しないと仮定して，以下の設問に答えよ。

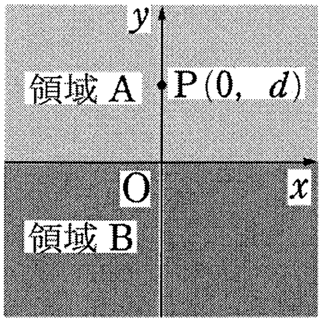


図1

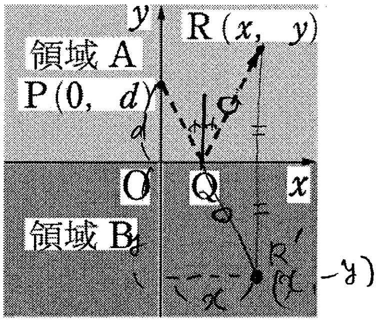


図2

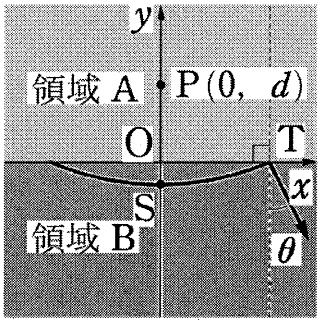


図3

Ⅰ　図3−1のように，領域Aの座標$(0, d)$の点Pに波源を置く。波源は一定の周期で振動し，まわりの水面に同心円状の波を広げる。

Aについて、$f=\dfrac{V}{\frac{d}{2}}=\dfrac{2V}{d}$

(1)　領域Aにおけるこの波の波長を$\dfrac{d}{2}$とする。その波の振動数を，V，dを用いて表せ。また，同じ波源が領域Bにある場合，そこから出る波の波長を求めよ。

Bについて考えると、$\lambda'=\dfrac{\frac{V}{2}}{f}=\dfrac{\frac{V}{2}}{\frac{2V}{d}}=\dfrac{d}{4}$ //

(2)　波長に比べて水深が十分に小さい場合，波の速さvは重力加速度の大きさgと水深hを用いて$v=g^a h^b$と表される。ここでa，bは定数である。両辺の単位を比較することによりa，bを求めよ。これを用いて領域Aの水深は領域Bの水深の何倍か求めよ。

$v = g^a h^b$

$[m\,s^{-1}]=[m^a s^{-2a}][m^b]$ ← 単位を考えると

mについて $\Rightarrow a+b=1$，sについて $-2a=-1$

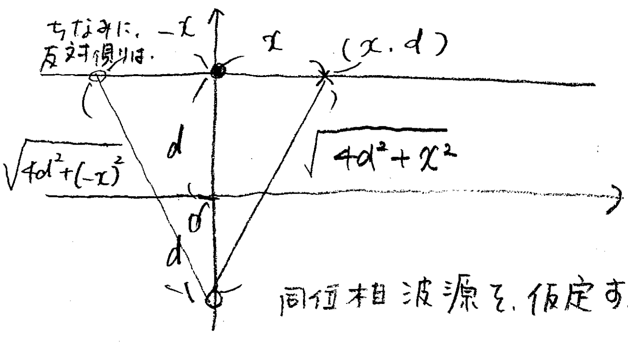
よって、$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$

左の考察より、$v=\sqrt{gh}$.　速さ2倍なので、水深は4倍。　[m/s]

(3)　図3−2のように，波源Pから出た波が境界上の点Qで反射した後，座標(x, y)の点Rに伝わる場合を考える。点Qの位置は反射の法則により定まる。このとき，距離$\overline{PQ}+\overline{QR}$を，$x$，$y$，$d$を用いて表せ。　図2に書きこんで作図から、

$\overline{PQ}+\overline{QR}=\overline{PR'}=\sqrt{x^2+(d+y)^2}$

(4)　直線$y=d$上の座標(x, d)の点で，波源から直接伝わる波と境界からの反射波が弱め合う条件を，x，dと整数nを用いて表せ。また，そのような点は直線$y=d$上に何個あるか。



干渉の条件式

(経路差) $=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\lambda$ なら、弱めあう。

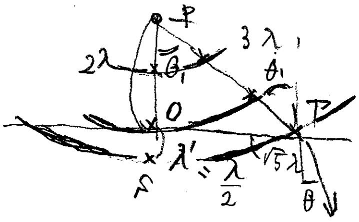
仮波源から　波源から

$\sqrt{4d^2+x^2}-|x|=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{d}{2}$ //

波の同位相波源を、仮定すると、2つの波源からの干渉と考えることができる!!

→次ページ下へ。

(5)　領域 B において波源と同じ位相を持つ波面のうち，原点 O から見て最も内側のものを考える。図 3－3 のように，その波面と x 軸($x>0$)との交点を T，y 軸との交点を S とし，点 T における屈折角を θ とする。点 S，T の座標と $\sin\theta$ を求めよ。



Pと同じ位相 = 同じ振動状態の点は、1波長 距離 離れるごとに存在するので、左図のようになる。B中では波長が半分であることを考えれば、

$S\left(0, -\frac{d}{4}\right)$, $T\left(\sqrt{5}\times\frac{d}{2}, 0\right)$

屈折の法則より $\sin\theta_1 = 2\sin\theta$

$\sin\theta = \frac{1}{2}\sin\theta_1 = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{6}$

Ⅱ　設問Ⅰと同じ振動数の波源が一定の速さで動いている場合について，以下の設問に答えよ。

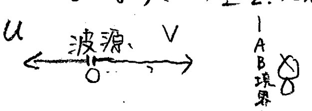
(1)　波源が領域 A の y 軸上を正の向きに速さ $u\left(u<\frac{V}{2}\right)$ で動いている場合を考える。波源の位置で観測される反射波の振動数を，V，u，d を用いて表せ。また，領域 B の y 軸上を負の向きに一定の速さ $w\left(w<\frac{V}{2}\right)$ で動く点で観測される波の振動数を，V，u，w，d を用いて表せ。

ドップラー効果を考える　(A)　(B)

(A)

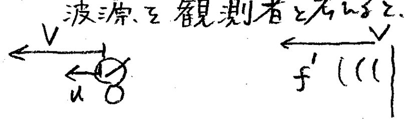
ABの境界を『壁』と考える

① まず『壁』を観測者と考えて



$f' = \frac{V}{V+u}\cdot\frac{2V}{d}$　f

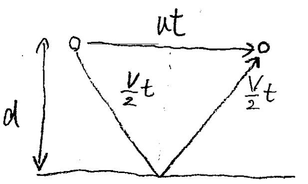
② 次に壁を音源と考えて、波源を観測者と考えると、



$f'' = \frac{V-u}{V} f'$　代入

$= \frac{V-u}{V+u}\cdot\frac{2V}{d}$

(2)　次に，波源が領域 A の直線 $y=d$ 上を右向きに速さ $u\left(u<\frac{V}{2}\right)$ で動いている場合を考える。波源から出た波が境界で反射して波源に戻るまでの時間を，V，u，d を用いて表せ。

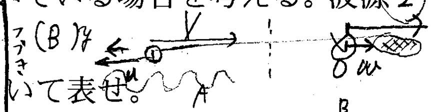


左図から

$\left(\frac{1}{2}ut\right)^2 + d^2 = \left(\frac{V}{2}t\right)^2$

$t^2 = \frac{4d^2}{V^2-u^2}$　$t = \frac{2d}{\sqrt{V^2-u^2}}$

ここがポイント $\frac{V}{2}$



Aでの波長は、$\lambda = \frac{V+u}{f} = \frac{V+u}{2V}\cdot d$

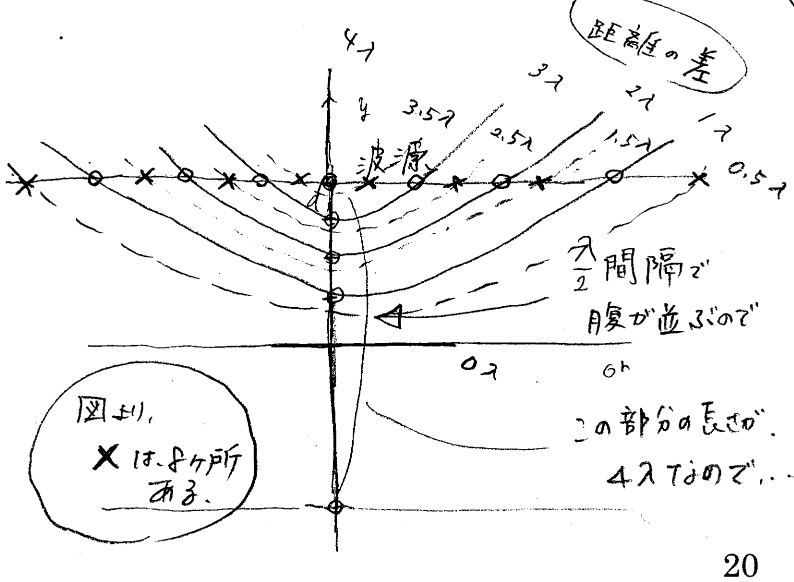
Bでは変化して、$\lambda' = \frac{\lambda}{2} = \frac{V+u}{4V}\cdot d$

ゾーンにある波の数を考えて

$f''' = \frac{\frac{V}{2}-w}{\lambda'} = \frac{V-2w}{V+u}\cdot\frac{2V}{d}$

(3)　設問Ⅱ(2)の設定で，波源における波と境界で反射して波源に戻った波が逆位相になる条件を，u，V と整数 m を用いて表せ。さらに，この条件を満たす u をすべて求めよ。

Ⅰ(4)



図より、×は8ヶ所ある。

領域Aの波の周期に注目すると、

$T = \frac{1}{f} = \frac{d}{2V}$，(2)の t が、この半整数倍であればよいので、

$\frac{2d}{\sqrt{V^2-u^2}} = \left(m+\frac{1}{2}\right)\times\frac{d}{2V}$

$\Leftrightarrow \frac{4V}{\sqrt{V^2-u^2}} = \left(m+\frac{1}{2}\right)$　$(m=0,1,2\cdots)$

$u=\frac{V}{2}$ とすると (左辺) $= \frac{4V}{\sqrt{V^2-\frac{V^2}{4}}} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \fallingdotseq 4.6$

$u=0$ で (左辺) $=4$。よって、右辺の $m=4$ である。のみ

$\frac{4V}{\sqrt{V^2-u^2}} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 64V^2 = 81V^2 - 81u^2$

$81u^2 = 17V^2 \Leftrightarrow u = \frac{\sqrt{17}}{9}V$