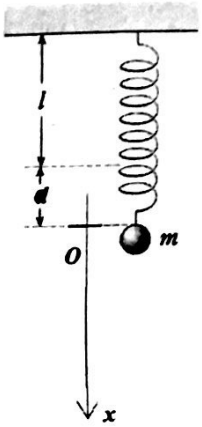
単振動の単元テストのために　単元テストは 4/11（土）の予定

問 1　特別学習会で扱った水平ばね振り子の問題を見直しておきましょう。

問 2　自然の長さ l の軽いばねの一端を天井に固定し，他端に質量 m の小球をつるすと，ばねが d の長さだけ伸びて静止した。ここで，小球を鉛直方向にもち上げ，ばねが自然長 l となるようにして急に手をはなすと，小球は単振動をした。重力加速度の大きさを g とする。



(1)ばね定数 k を m, g, d を用いて表せ。

力のつりあいを考えて、　$mg - kd = 0$　　$k = \frac{mg}{d}$

(2)この場合の振動中心について正しいものを全て選択せよ

(a)速さが最大の点である　○

(b)ばねが自然長となる点である　×

(c)力のつりあいの位置と等しい　○

(d)加速度が 0 である。　○

つりあいの位置を原点 O として、鉛直下向きに x 軸をとる。

(3) この単振動の運動方程式について、次の空欄に適する文字式を解答用紙に記入せよ。

物体にはたらく力は重力とばねの弾性力であるから、m, g, k, d, x を用いて、

$ma =$ （ ア mg ） − （ イ $k(d+x)$ ）

と立式できる。また、前問(3)と(1)より、角速度 ω と m, g, d, x を用いて、

$m($ ウ $) =$ （ エ ）　　$k = \frac{mg}{d}$ より

と整理することができる。

$ma = -\frac{mg}{d}x \longrightarrow m(-\omega^2 x) = -\frac{mg}{d}x$ ①

$a = (-\omega^2 x)$

(4) 単振動の周期はいくらか。

(5) 手を離したあと初めて原点を通過するまでの時間はいくらか。　$x=0$ で、$a=0$ だから……

(6) 振動の中心を通過するとき，小球の速さはいくらか。（力学的エネルギーで考えてみよう）

(4) 運動方程式①より

$\omega = \sqrt{\frac{g}{d}}$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}$

(5)

$t = \frac{T}{4}$ であり

$= \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{d}{g}}$

(6)

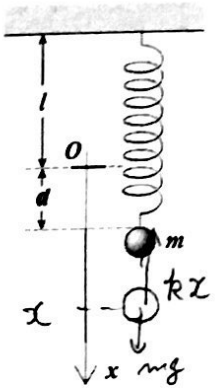
$0 + 0 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgd + \frac{1}{2}kd^2$

$0 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mgd}{2}$

$v = \sqrt{gd}$

問３　問２を、軸の位置を変えて解きなおしてみましょう。

自然の長さ l の軽いばねの一端を天井に固定し，他端に質量 m の小球をつるすと，ばねが d の長さだけ伸びて静止した。ここで，小球を鉛直方向にもち上げ，ばねが自然長 l となるようにして急に手をはなすと，小球は単振動をした。重力加速度の大きさを g とする。自然長の位置を原点Ｏとして、鉛直下向きに x 軸をとる。



(1)ばね定数 k を m, g, d を用いて表せ。

力のつりあいを考えて、 $mg - kd = 0$　$k = \frac{mg}{d}$

(2)この場合の振動中心について正しいものを全て選択せよ

(a)速さが最大の点である　○

(b)ばねが自然長となる点である　×

(c)力のつりあいの位置と等しい　○

(d)加速度が０である。　○

(3) この単振動の運動方程式について、次の空欄に適する文字式を解答用紙に記入せよ。

物体にはたらく力は重力とばねの弾性力であるから、m, g, k, d, x を用いて、

$ma =$ （ ア mg ）－（ イ kx ）

と立式できる。また、前問(3)と(1)より、角速度 ω と m, g, d, x を用いて、

m（　ウ　）＝（　エ　）

と整理することができる。

$ma = mg - \frac{mg}{d} \cdot x$

$ma = -\frac{mg}{d}(x - d)$

ここで、$a = (-\omega^2 x)$ としないこと!!

$x = d$ で、$a = 0$ だから、$a = (-\omega^2(x-d))$

$m(-\omega^2(x-d)) = -\frac{mg}{d}(x-d)$ → $\omega = \sqrt{\frac{g}{d}}$

(4)　単振動の周期はいくらか。

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}$

---

(6)　振動の中心を通過するとき，小球の速さはいくらか。（単振動のエネルギーで考えてみよう）

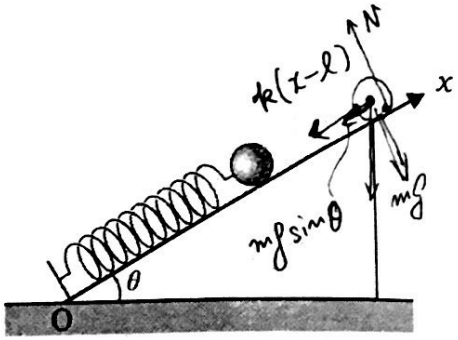
$0 + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv^2 + 0$

$v = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot d \overset{(1)より}{=} \sqrt{gd}$

☞鉛直ばね振り子については、原点を自然長にとる場合と、振動中心にとる場合がある。いずれにしても、(3)のような流れで、運動方程式を立式し、－▲x か－▲(x－○)といった形に整理することで，ω を導出する。また、(6)のように力学的エネルギー保存則を立式する場合に、従来のように mgh を考えるか、単振動のエネルギーで考えるかを明確にして２つを混同しないことが重要である。

問４　確認問題

下図のように，水平面から θ だけ傾いた滑らかな斜面において，自然長 l，ばね定数 k の軽いばねの一端を点Ｏに付け，他端に質量 m のおもりを付ける。重力加速度の大きさを g とする。



(1) おもりを静止させたときのばねの縮みの大きさを求めよ。また、そのときの x 座標はいくらか。

dとして.

力のつりあいを考えて.

$mg\sin\theta = kd$　　$d = \dfrac{mg\sin\theta}{k}$

おもりを，静止した位置より斜面に沿って d だけ押し下げて手を放すと，おもりは斜面に沿って単振動した。

(2) 物体に働く斜面水平方向の合力を求めなさい。

図より.

座標が、x である物体について考えると.

$-mg\sin\theta - k(x-l)$

(3) 角振動数を ω として、この単振動についての運動方程式を立式しなさい。

$ma = -mg\sin\theta - k(x-l)$

$m\left(-\omega^2\left(x-l+\dfrac{mg\sin\theta}{k}\right)\right) = -k\left(x-l+\dfrac{mg\sin\theta}{k}\right)$

(4) 合力や加速度が０となる点を考え、この単振動の、振動中心の x 座標を求めなさい。

左辺の、$x - l + \dfrac{mg\sin\theta}{k} = 0$ より.

$x = l - \dfrac{mg\sin\theta}{k}$

(5) この単振動の周期を求めよ。

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

$\dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

(6) この単振動の振幅を求めよ。

単振動の力学的エネルギーを用いて.

振幅をAとして.

$\dfrac{1}{2}kd^2 = \dfrac{1}{2}kA^2$

$A = d = \dfrac{mg\sin\theta}{k}$

問２ (1) $\dfrac{mg}{d}$　(2)(a)(c)(d)　(3)(ア) mg　(イ) $k(d+x)$　(ウ) $-m\omega^2 x$　(エ) $-\dfrac{mg}{d}x$

(4) $2\pi\sqrt{\dfrac{d}{g}}$　(5) $\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{d}{g}}$　(6) $\sqrt{gd}$

問３ (3)(ア) mg　(イ) kx　(ウ) $-m\omega^2(x-d)$　(エ) $-mg/d\,(x-d)$　他は問２同様