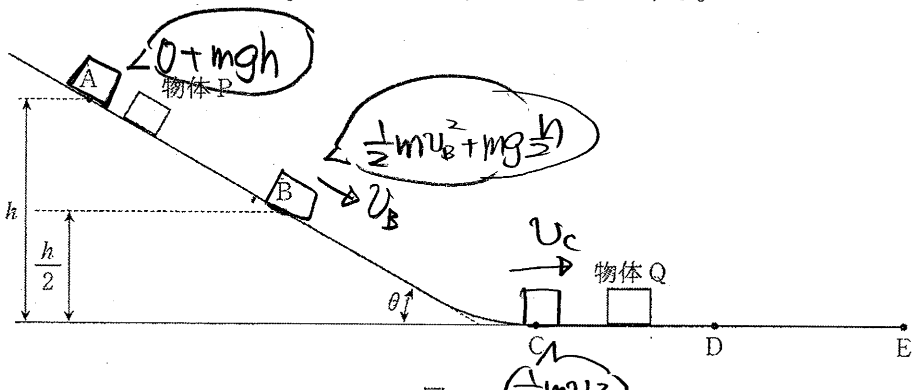
2物体の衝突は $\begin{cases} ①\ 運動量保存則 \\ ②\ 反発係数の式 \end{cases}$ が基本！

1　2015 年　鹿児島大学　前期日程

図に示すように，水平面から A 点までの高さが h[m]，B 点までの高さが $\frac{h}{2}$[m]，水平面となす角度が θ の斜面があり，その先に水平面 C−E がなめらかに続いている。C 点と D 点の間には質量 M[kg]の物体 Q が静止している。質量 m[kg]の物体 P を A 点に静かに置いたところ，物体はすべり始め，やがて物体 Q に衝突した。その後，物体 Q は E 点手前まで移動して止まった。

物体 P，物体 Q と斜面 A−C および水平面 C−D との間には摩擦はなく，これらの物体と水平面 D−E との間の動摩擦係数は μ である。重力加速度の大きさを g[m/s^2]として，次の問いに答えよ。ただし，物体 P，物体 Q の大きさは無視できるものとする。



図

(1)　物体 P の B 点における速さ v_B [m/s]を求めよ。

A. B間で力学的エネルギー保存則を用いる.

$$mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 + mg\frac{h}{2}$$

$$\therefore v_B = \sqrt{gh}\ [\mathrm{m/s}]$$

(2)　物体 P の C 点における速さ v_C [m/s]を求めよ。

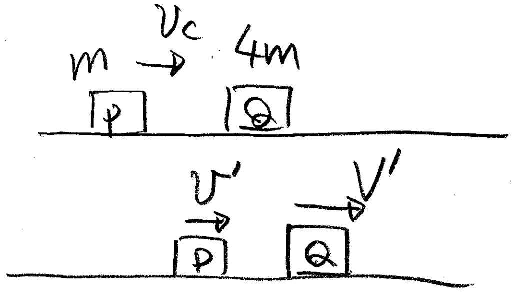
A C間で，力学的エネルギー保存則

$$mgh = \frac{1}{2}mv_C^2$$

$$\therefore v_C = \sqrt{2gh}\ [\mathrm{m/s}]$$

(3)　衝突後の物体 Q の D 点からの移動距離 x_Q [m]を求めよ。ただし，物体 P と物体 Q の間の反発係数は 0.50，$M = 4m$ [kg]，$\mu = \frac{1}{20}$ とする。

☆ まずは、PとQの衝突



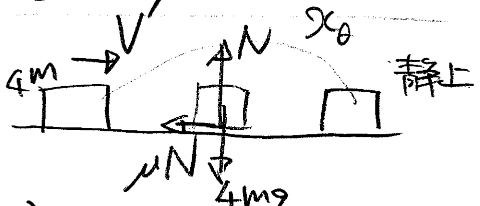
$$\begin{cases} 運動量保存則 \\ mv_C = mv' + 4mV' \\ 反発係数の式 \\ 0.50 = -\dfrac{v' - V'}{v_C} \end{cases}$$

$$v' + 4V' = v_C$$

$$-)\ -v' + V' = \frac{1}{2}v_C$$

$$5V' = \frac{3}{2}v_C$$

$$V' = \frac{3}{10}v_C$$



☆ (力学的エネルギー変化) = (非保存力の仕事)より，

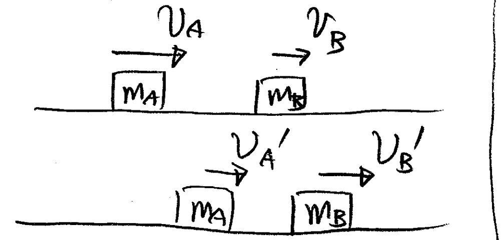
$$0 - \frac{1}{2}4mV'^2 = -\mu \cdot 4mg \cdot x_Q$$

$$\therefore x_Q = \frac{V'^2}{2\mu g} = \frac{\frac{9}{100} \times 2gh}{2 \times \frac{1}{20} \times g}$$

$$= \frac{9}{5}h\ [\mathrm{m}]$$

別解として，運動方程式を使ったり エネルギーの原理を用いてもOK

一般に



$$\begin{cases} m_Av_A + m_Bv_B = m_Av_A' + m_Bv_B' \\ e = -\dfrac{v_A' - v_B'}{v_A - v_B} \end{cases}$$

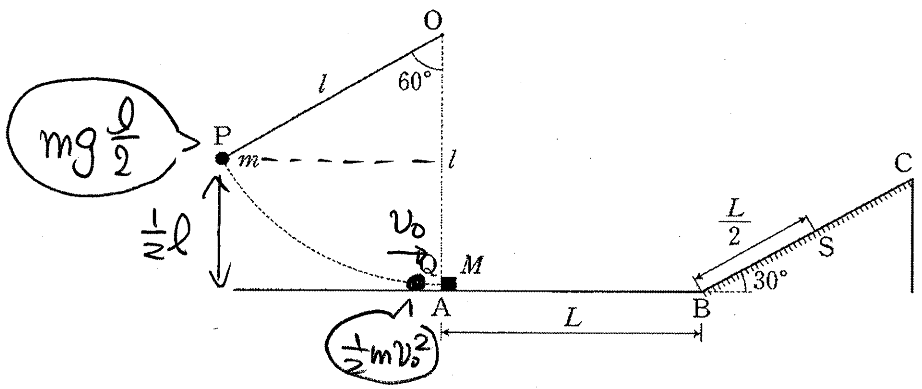
必須スキルである。

速さと速度の扱いの違い，向きの処理など，様々なパターンで慣れておくこと。

答　(1) $v_B = \sqrt{gh}$ [m/s]　(2) $v_C = \sqrt{2gh}$ [m/s]　(3) $x_Q = \frac{9h}{5}$ [m]

2 2011年 信州大学 前期日程

図のように，質量 m[kg]の球 P がとりつけられた長さ l [m]の軽い糸があり，その他端が水平面から高さ l [m]の点 O に固定されている。糸がたるまないように鉛直方向と角度60°をなす位置まで球 P を持ち上げて静かに離す。球 P は最下点 A に置かれている質量 M[kg]の物体 Q ($M>m$)と衝突し，物体 Q は衝突後，なめらかな水平面 AB 上を L[m]動いた後，角度30°のあらい斜面BC 上を直線運動し，距離 $\frac{L}{2}$ [m]だけ動いて点 S で静止した。球 P および物体 Q の大きさは無視でき，空気抵抗は考えなくてよい。また，点 B において水平面と斜面は，なめらかにつながっているものとする。球 P と物体 Q の反発係数を e，物体 Q と斜面との間の動摩擦係数を μ'，重力加速度の大きさを g[m/s²]とする。衝突直前および衝突直後の速度は右向きを正とする。以下の各問に答えよ。答は主な式や説明をつけて解答欄に記入せよ。

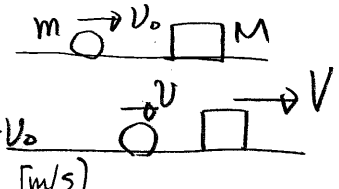


(a) 衝突直前の球 P の速度 v_0 [m/s]を g，l を用いて表せ。

力学的エネルギー保存則

$mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}mv_0^2$ ∴ $v_0=\sqrt{gl}$ [m/s]

(b) 衝突直後の球 P と物体 Q の速度をそれぞれ v[m/s]，V[m/s]とするとき，v と V を m, M, v_0，e を用いて表せ。



運動量保存則
$mv_0 = mv+MV$
反発係数
$e=-\frac{v-V}{v_0}$

解くと，

$v=\frac{m-eM}{m+M}v_0$ [m/s]，$V=\frac{m(1+e)}{m+M}v_0$ [m/s]

(c) 球 P が物体 Q との衝突直後に左向きに運動するのは，反発係数 e の値がどんなときか。e の範囲を m，M を用いて表せ。

$v<0$ より

$m-eM<0$

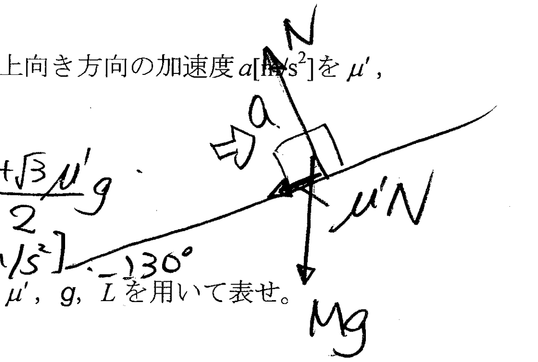
∴ $\frac{m}{M}<e$

※そもそも $0\leqq e\leqq 1$ であるので

$\frac{m}{M}<e\leqq 1$

4

(d) 物体 Q が点 B から点 S まで運動するときの斜面に沿って上向き方向の加速度 a[m/s²]を μ'，g を用いて表せ。



斜面 $Ma=-\frac{1}{2}Mg-\mu'N$
垂直 $N=\frac{\sqrt{3}}{2}Mg$

∴ $a=-\frac{1+\sqrt{3}\mu'}{2}g$ [m/s²]

(e) 動摩擦力が BS 間で物体 Q に対してした仕事 W[J]を M，μ'，g，L を用いて表せ。

$W=-\mu'N\times\frac{L}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{4}\mu'MgL$ [J] 基本は力×キョリ

(f) 動摩擦係数 μ' を V，g，L を用いて表せ。

解① 等加速度運動の式 ((d)で求めたaを利用)

$0-V^2=2a\frac{L}{2}$

$\frac{V^2}{L}=\frac{1+\sqrt{3}\mu'}{2}g$

$\mu'=\frac{2V^2}{\sqrt{3}gL}-\frac{1}{\sqrt{3}}$

解② (力学的エネルギー変化)=($W_{外}$)

$Mg\frac{L}{4}-\frac{1}{2}MV^2=-\frac{\sqrt{3}}{4}\mu'MgL$

∴ $\mu'=\frac{2V^2}{\sqrt{3}gL}-\frac{1}{\sqrt{3}}$

これを忘れがち。(Sでの位置エネ)

(g) 物体 Q が球 P と衝突してから点 S に達するまでの時間 t[s]を V，L を用いて表せ。

(g) 時間はエネルギーで出ないので，等加速度運動の式を使う

BS間は(f)より $a=-\frac{V^2}{L}$ なので，

$0=V+at'$ ∴ $t'=-\frac{V}{a}=\frac{L}{V}$

∴ $t=\frac{L}{V}+t'=\frac{2L}{V}$ [s]

⇨ $\begin{cases} mv+MV=mv_0 & \cdots① \\ -v+V=ev_0 & \cdots② \end{cases}$

①−②×M

$(m+M)v=(m-eM)v_0$

①＋②×m

$(m+M)V=m(1+e)v_0$

答 (a) $v_0=\sqrt{gl}$ [m/s] (b) $v=\frac{m-eM}{m+M}v_0$ [m/s]，$V=\frac{(1+e)m}{m+M}v_0$ [m/s] (c) $\frac{m}{M}<e\leqq 1$

(d) $a=-\frac{(1+\sqrt{3}\mu')}{2}g$ [m/s²] (e) $W=-\frac{\sqrt{3}}{4}\mu'MgL$ [J] (f) $\mu'=\frac{2V^2}{\sqrt{3}gL}-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (g) $t=\frac{2L}{V}$ [s]

3 2010年 名古屋大学 前期日程

図1のように，水平な床の上に質量$2m$の水平な台を置き，大きさが無視できる2つの小物体A，Bの台の上面での運動を考える。紙面に垂直な方向の運動は考えない。小物体A，Bの質量はともにmとする。台の上面のうちPQ間はなめらかであり，この区間では台と小物体A，Bとの間の摩擦は無視できる。QR間には摩擦があり，小物体A，Bと台の上面QR間との間の静止摩擦係数はμ，動摩擦係数はμ'である。また，小物体Aと小物体Bの衝突における反発係数(はねかえり係数)eは$0<e<1$を満たす。重力加速度をgとして，以下の問いに答えよ。

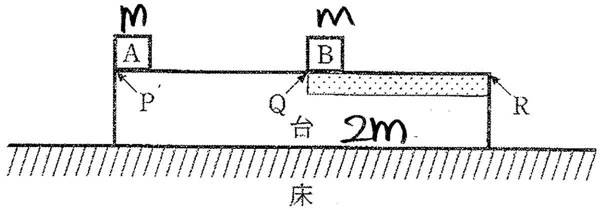


図1

解答は，答案紙の所定の欄の中に書け。計算欄には，答にいたるまでの過程の**要点**(法則，関係式，論理，計算など)を書け。

はじめに，台を床に固定具で固定し，小物体Bを台上から取り除く。台上での小物体Aの運動を考える。図2のように，小物体Aを台の上面のP点から初速度v_0で右向きに滑らせたところ，小物体AはQ点から距離l_1だけ離れた台上の点で静止した。

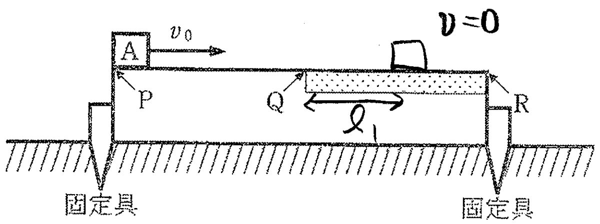
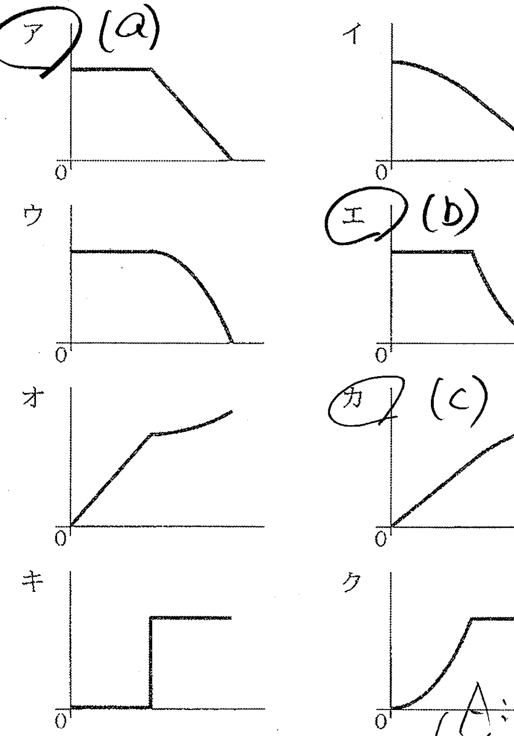


図2

設問(1)：運動をはじめてから静止するまでの小物体Aの運動を考える。(a)小物体Aの速度の時間変化，(b)運動エネルギーの時間変化，(c)P点から小物体Aまでの距離の時間変化を示すグラフとして適切なものを次のア〜クからそれぞれひとつずつ選べ。ただし，グラフの横軸は小物体Aが運動を開始してからの時間を表し，縦軸は速度，運動エネルギー，または距離を表すものとする。



0までの時間

$v=v_0-\mu' g(t-t_0)$

$K=\frac{1}{2}m\{v_0-\mu' g(t-t_0)\}^2$

tの2次関数（t²の係数正）

A: $ma=f$

台: $2ma=\mu' mg-f$

$\therefore f=\frac{1}{3}\mu' mg$

$0-\frac{1}{2}mv_0^2=-\mu' mgl_1$ $\quad l_1=\frac{v_0^2}{2\mu' g}$

設問(2)：距離l_1を，m，μ，μ'，e，g，v_0の中から適切なものを用いて表せ。

次に，台を床に固定具で固定したまま，小物体Bを台上のQ点に静かに置く。図3のように台の上面のP点から，初速度v_0で小物体Aを右向きに滑らせると，小物体Aと小物体Bは衝突を起こし，衝突後，Q点からそれぞれ右に距離l_2，l_3だけ離れた台上の点に静止した。

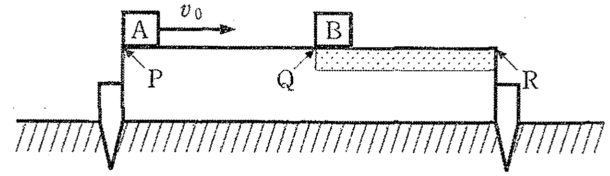


図3

$\begin{cases} mv_0=mv_A+mv_B \\ e=-\frac{v_A-v_B}{v_0} \end{cases}$ より $\begin{cases} v_A=\frac{1-e}{2}v_0 \\ v_B=\frac{1+e}{2}v_0 \end{cases}$

設問(3)：衝突直後の小物体Aと小物体Bの運動エネルギーを，m，μ，μ'，e，g，v_0の中から適切なものを用いてそれぞれ表せ。

A: $\frac{1}{2}mv_A^2=\frac{1}{8}m(1-e)^2v_0^2$

B: $\frac{1}{2}mv_B^2=\frac{1}{8}m(1+e)^2v_0^2$

設問(4)：距離l_3と距離l_2との差l_3-l_2を，m，μ，μ'，e，g，v_0の中から適切なものを用いて表せ。

設問(2)を参考に，

$l_2=\frac{v_A^2}{2\mu' g}=\frac{(1-e)^2v_0^2}{8\mu' g}$，$l_3=\frac{(1+e)^2v_0^2}{8\mu' g}$ なので，$l_3-l_2=\frac{ev_0^2}{2\mu' g}$

次に，台を床に固定する固定具を取り外し，台が床の上を自由に滑ることができるようにする。床と台との間の摩擦は無視できる。静止した台の上のQ点に小物体Bを静かに置く。図4のように，台上のP点から初速度v_0で小物体Aを右向きに滑らせると，小物体Aと小物体Bは衝突した。衝突直後の台の速度は0であった。小物体Aは，小物体Bとの衝突後，QR間の点で台との間の相対速度が0となり，以降は台と一体となって運動した。さらにその後，小物体Bは，QR間の点で台との間の相対速度が0となり，以降は台と一体となって右向きに速度V_1で運動した。

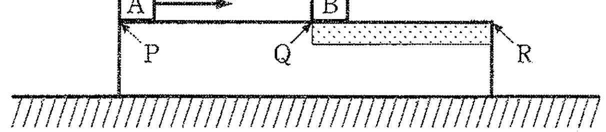


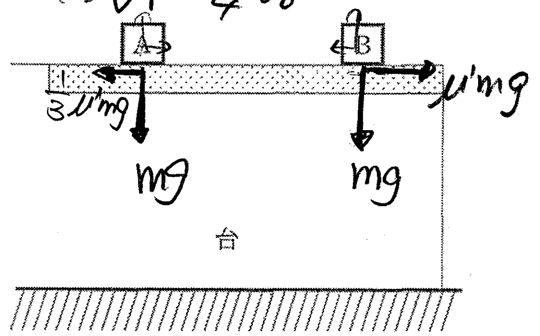
図4

A，B，台の3つで考えると，運動量が保存しているので

設問(5)：速度V_1を，m，μ，μ'，e，g，v_0の中から適切なものを用いて表せ。

$mv_0=(m+m+2m)V_1$ $\quad \therefore V_1=\frac{1}{4}v_0$

設問(6)：小物体Aと台との間の相対速度が0となってから，小物体Bと台との間の相対速度が0となるまでの間の台の運動を考える。小物体Aと小物体Bが台に及ぼす力をすべて解答欄の図中に矢印で示し，それらの力の大きさを解答欄の図中に数式で記せ。解答に際しては，力の向きに留意して矢印を図示せよ。数式は，m，μ，μ'，e，g，v_0の中から適切なものを用いて表せ。



床

ポイントは摩擦の向き，

・Bは(A+台)より速いので，Bのまさつ左向き，台のまさつ右向き(動)

・A，台間の(静)は，0だと，台だけ加速してしまうので，A右，台左