1 2014年　新潟大学　前期日程

斜面を持つ質量 M の物体 A と，質量 $m(<M)$ の小物体 B が水平な床に置かれている。重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えよ。ここで，床や物体 A の斜面はなめらかであり，摩擦や空気抵抗は無視できるものとしてよい。

問 1　図 1 のように，静止した物体 A に向かって，左側から小物体 B が速さ v_0 で進んできた。ここで小物体 B は，物体 A と床の境目をなめらかに移動できるものとする。

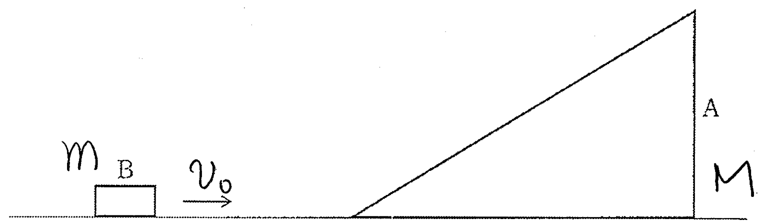


図 1

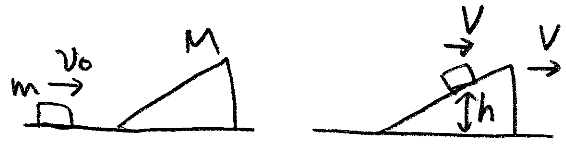
小物体 B が斜面を上がり始めると物体 A も運動を始めた。斜面上で小物体 B が達する最高点の高さを h，そのときの物体 A の速さを V とする。ただし，小物体 B が斜面を越えることはないものとする。

台から見て小物体は一瞬静止 ⇒ 相対速度0
⇒ 両者同じ速度

(1)　小物体 B が斜面の最高点に達したときの A と B を合わせた物体系の運動エネルギー，および運動量を書け。

運動エネルギー　$\frac{1}{2}(m+M)V^2$

運動量　$(m+M)V$



(2)　力学的エネルギー保存，および水平方向の運動量保存の関係を用いて，V と h を求めよ。

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(m+M)V^2 + mgh \\ mv_0 = (m+M)V \end{cases}$$

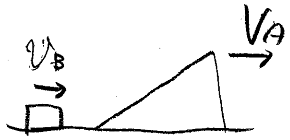
これらを解いて　$V = \frac{m}{m+M}v_0$

$h = \frac{Mv_0^2}{2(m+M)g}$

その後，小物体 B は斜面をすべり下りて，物体 A と分かれて床の上を運動した。

(3)　このときの物体 A と小物体 B の速さを，M，m，v_0 を用いてそれぞれ表せ。また，運動の向きについてもそれぞれ答えよ。

(向き不明のため)速度を V_A，v_B とおく。



$$\begin{cases} \text{運}\ mv_0 = mv_B + MV_A \\ \text{力}\ \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}MV_A^2 \end{cases}$$

→ 地道に計算
$v_B = v_0 - \frac{M}{m}V_A$ を代入

$mv_0^2 = m(v_0 - \frac{M}{m}V_A)^2 + MV_A^2$

V_A キぼり　(右)

$V_A = \frac{2m}{M+m}v_0$，　$v_B = \frac{m-M}{m+M}v_0$ ⇒ (左)に $\frac{M-m}{M+m}v_0$

(後半は授業では扱いません)

問 2　図 2 のように，物体 A の斜面が床と角度 θ をなしているとする。静止した物体 A の斜面上に小物体 B を静かに置いて手をはなすと，A と B は同時に運動を始めた。物体 A の床面に対する加速度を右向きに a_A とし，斜面に固定された座標系における小物体 B の加速度を斜面に沿って下向きに a_B とする。また，小物体 B と斜面の間の垂直抗力の大きさを N とする。

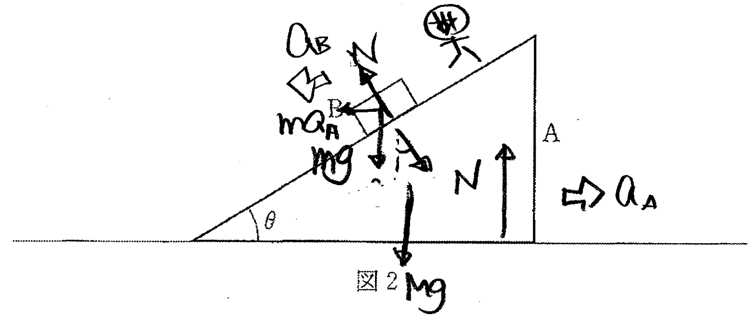


図 2

・力さえ正しく図示できればOK

(1)　物体 A の水平方向の運動について運動方程式を書け。

$Ma_A = N\sin\theta$

(2)　斜面に固定された座標系においては物体 A の運動による慣性力がはたらくことに注意して，小物体 B の斜面に沿った方向の運動について運動方程式を書け。

$ma_B = mg\sin\theta + ma_A\cos\theta$

(3)　小物体 B に対して斜面に垂直な方向にはたらく力のつり合いの式を書け。

$N + ma_A\sin\theta = mg\cos\theta$

(4)　加速度 a_B を M，m，θ および g で表せ。

(1)(3)より　$Ma_A = (mg\cos\theta - ma_A\sin\theta)\sin\theta$

$a_A = \frac{mg\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}$

(2)へ代入し

$a_B = g\sin\theta + \frac{mg\sin\theta\cos^2\theta}{M+m\sin^2\theta}$

$= \frac{(M+m)\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}g$

答　問 1　(1)運動エネルギー…$\frac{1}{2}(M+m)V^2$、運動量…$(M+m)V$　(2) $V = \frac{m}{M+m}v_0$

$h = \frac{Mv_0^2}{2(M+m)g}$　(3)　A　$\frac{2m}{M+m}v_0$，水平右向き　B　$\frac{M-m}{M+m}v_0$，水平左向き

問 2　(1) $Ma_A = N\sin\theta$　(2) $ma_B = ma_A\cos\theta + mg\sin\theta$

(3) $N + ma_A\sin\theta = mg\cos\theta$　(4) $a_B = \frac{(M+m)\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}g$

別解　これはe=1に相当

$$\begin{cases} mv_0 = mv_B + MV_A \\ 1 = -\frac{v_B - V_A}{v_0} \end{cases}$$

2 2013年　新潟大学　前期日程

水平な床の上における小物体の運動について，以下の問いに答えよ。

問1　水平で摩擦のある床の上に，質量 m の小物体 A と質量 M の小物体 B を静止させておく。ただし，$m < M$ である。

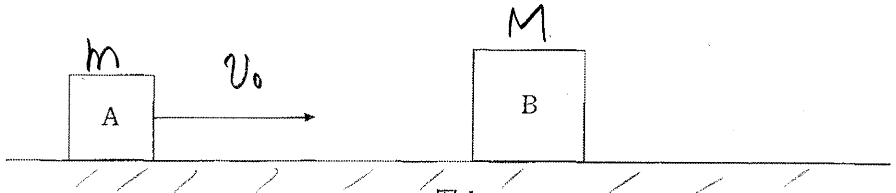
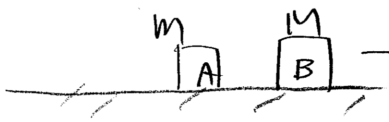


図1



いま，図1のように，小物体 A を水平方向から小物体 B と衝突させたところ，衝突直後に，小物体 A が静止し，小物体 B は衝突直前の小物体 A と同じ向きに運動した。

(1)　衝突直前の小物体 A の速さを v_0 とする。衝突直後の小物体 B の速さ v を求めよ。

運動量保存則

$$mv_0 = Mv \qquad \therefore v = \frac{m}{M}v_0$$

(2)　この衝突における反発係数(はねかえり係数)e はいくらか，m および M を用いて表せ。

$$e = -\frac{0 - v}{v_0 - 0} = \frac{m}{M}$$

(3)　衝突直前の小物体 A の運動エネルギーを K_0 で表すとき，衝突直後の小物体 B の運動エネルギー K は K_0 の e 倍になることを示せ。　$v = ev_0$，$M = \frac{m}{e}$ より

$$K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{m}{e}(ev_0)^2 = e\cdot\frac{1}{2}mv_0^2 = eK_0$$

(4)　小物体 B は衝突後に距離 l だけ直進して静止した。重力加速度の大きさを g とし，床と小物体 B の動摩擦係数を μ' とするとき，l を v_0，e，g および μ' を用いて表せ。

1回目でやりましたね。

$$0 - \frac{1}{2}M(ev_0)^2 = -\mu' Mgl$$

$$l = \frac{(ev_0)^2}{2\mu' g}$$

問2　今度は，質量がともに m の小物体 C と小物体 D を質量の無視できるばねで連結し，水平でなめらかな床の上に静止させておく。

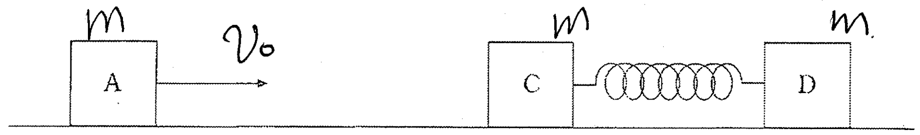
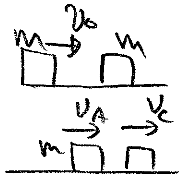


図2



いま，図2のように，この状態の小物体 C に，質量 m の小物体 A を，小物体 C と小物体 D を結ぶ直線に沿って速さ v_0 で衝突させた。衝突は弾性衝突とし，衝突以降の小物体は，小物体 A，C および D を結ぶ一直線上を運動するものとする。また，小物体の衝突の結果としてばねが縮む長さに比べて，ばねの自然長は十分長いものとする。　$e=1$

(1)　衝突直後の小物体 A および小物体 C の速さをそれぞれ求めよ。

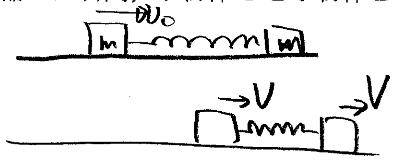
運　$mv_0 = mv_A + mv_C$

反　$1 = -\frac{v_A - v_C}{v_0}$　　$\therefore v_A = 0, v_C = v_0$

別解　$e=1$，同じ質量のとき　速度入れ替え

	A	C
前	v_0	0
後	0	v_0

(2)　ばねが最も縮んだ瞬間，小物体 C と小物体 D は同一の速さ V になった。このときの速さを求めよ。



運動量保存則

$$mv_0 = 2mV \qquad \therefore V = \frac{1}{2}v_0$$

(3)　ばねが最も縮んだ瞬間における小物体 C と小物体 D の運動エネルギーの合計 K' は，衝突前に小物体 A が持っていた運動エネルギー K_0 の何倍か。

$$K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$K' = \frac{1}{2}\cdot 2m\left(\frac{1}{2}v_0\right)^2 = \frac{1}{4}mv_0^2 = \frac{1}{2}K_0 \quad \left(\frac{1}{2}\text{倍}\right)$$

(4)　衝突前の状態と比べて，ばねが縮んだ長さは最大で d であった。ばねのばね定数を k とするとき，d を m，k および v_0 を用いて表せ。

力学的エネルギー保存則

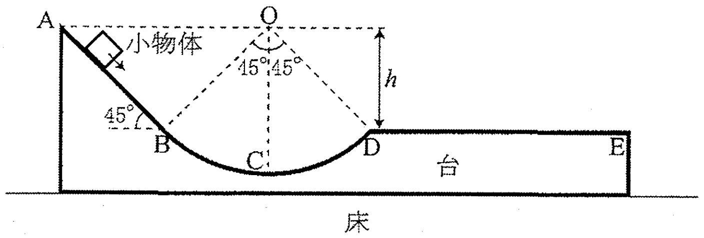
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{4}mv_0^2 + \frac{1}{2}kd^2 \qquad \therefore d = v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

答　問1(1) $v = \frac{m}{M}v_0$　(2) $e = \frac{m}{M}$　(3)略　(4) $l = \frac{(ev_0)^2}{2\mu' g}$

問2(1)A…0　C… v_0　(2) $V = \frac{1}{2}v_0$　(3) $\frac{1}{2}$ 倍　(4) $d = v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}$

3 2014年 大阪大学 前期日程

図のように，水平面からの傾き45°の斜面AB，円弧BCD，十分に長い水平面DEからなる台が，水平な床の上におかれている。点Aは円弧の中心Oと同じ高さにあり，OBおよびODは鉛直線OCとそれぞれ左右に45°の角度をなす。水平面DEを基準とする，点Oおよび点Aの高さはhであり，したがって円弧BCDの半径は$\sqrt{2}h$となる。大きさの無視できる質量mの小物体を点Aから静かにはなしたところ，小物体は斜面と円弧に沿って運動し，点Dで飛び出した後，再び台の上に落下した。小物体は紙面内でのみ運動するものとし，摩擦と空気抵抗は無視する。重力加速度の大きさをgとして，以下の問に答えよ。



I．台が床に固定されている場合について考える。

問1 点Dにおける小物体の速さ(速度の大きさ)を求めよ。

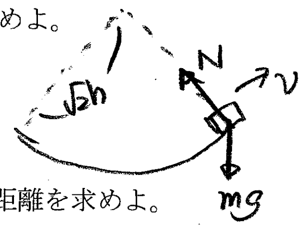
AD間で力学的エネルギー保存則

$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \therefore v = \sqrt{2gh}$

問2 点Dにおいて台から飛び出す直前に小物体が受ける垂直抗力の大きさを求めよ。

(円運動中なので)

$m\frac{v^2}{\sqrt{2}h} = N - \frac{1}{\sqrt{2}}mg \qquad \therefore N = \frac{3}{\sqrt{2}}mg$



問3 台から飛び出した小物体が落下する地点を台上の点Fとするとき，DF間の距離を求めよ。

D → 最高点までの時間をtとして

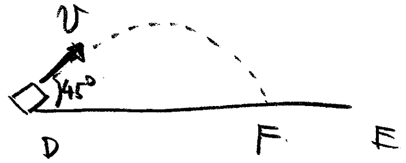
$\frac{v}{\sqrt{2}} - gt = 0$

$t = \frac{v}{\sqrt{2}g}$

2tでFまでいくので，

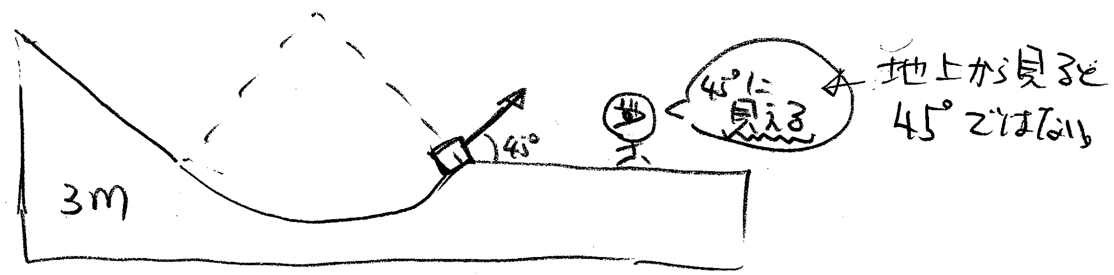
$DF = \frac{1}{\sqrt{2}}v \cdot 2\frac{v}{\sqrt{2}g}$

$= \frac{v^2}{g} = 2h$



II．

次に，台が床に対してなめらかに動ける場合について考える。台の質量を$3m$とする。はじめ，台は床に対して静止しており，小物体を点Aではなすことによって動き出す。台の運動も紙面内でのみ起こるものとする。



問4 小物体の点Dにおける台に対する相対速度の大きさをv'とする。このときの小物体の速度の鉛直成分(上向きを正とする)をv'を用いて表せ。

$\vec{v'} = \vec{v} - \vec{V}$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}v', \frac{1}{\sqrt{2}}v'\right) = (v_x, v_y) - (V, 0) = (v_x - V, v_y) \qquad \therefore v_y = \frac{1}{\sqrt{2}}v'$

問5 台と小物体についての運動量保存則を考慮することで，小物体の点Dにおける床に対する速度の水平成分と，このときの床に対する台の速度(ともに右向きを正とする)のそれぞれをv'を用いて表せ。

$$\begin{cases} 0 = mv_x + 3mV \\ \frac{1}{\sqrt{2}}v' = v_x - V \end{cases}$$

これらを解くと，

$v_x = \frac{3}{4\sqrt{2}}v', \ V = -\frac{1}{4\sqrt{2}}v'$

問6 v'をm，g，hのうち必要なものを用いて表せ。

力学的エネルギー保存則より

$mgh = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}3mV^2$

各値を代入して，

$v' = \sqrt{\frac{16gh}{7}}$

問7 台から飛び出した小物体が落下する地点を台上の点F′とするとき，DF′間の距離をhを用いて表せ。

台から見て運動を考えると，問3の結果を利用できる

$DF' = \frac{v'^2}{g} = \frac{16}{7}h$

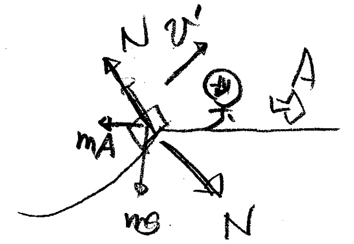
問8 小物体が点Dにおいて台から飛び出す直前における，床に対する台の加速度(右向きを正とする)をgを用いて表せ。

台の運動方程式

$3mA = \frac{1}{\sqrt{2}}N$ ← Nが求まらないとAが出ない ← 小物体の式を立てる

小物体は台から見て円運動

$m\frac{v'^2}{\sqrt{2}h} = N + \frac{1}{\sqrt{2}}mA - \frac{1}{\sqrt{2}}mg$



これで解ける！

$A = \frac{23}{49}g$

答 I．問1 $\sqrt{2gh}$ 問2 $\frac{3}{\sqrt{2}}mg$ 問3 DF = $2h$

II．問4 $\frac{v'}{\sqrt{2}}$ 問5 水平成分…$\frac{3}{4\sqrt{2}}v'$、速度…$-\frac{1}{4\sqrt{2}}v'$ 問6 $v' = 4\sqrt{\frac{gh}{7}}$

問7 $DF' = \frac{16}{7}h$ 問8 $\frac{23}{49}g$