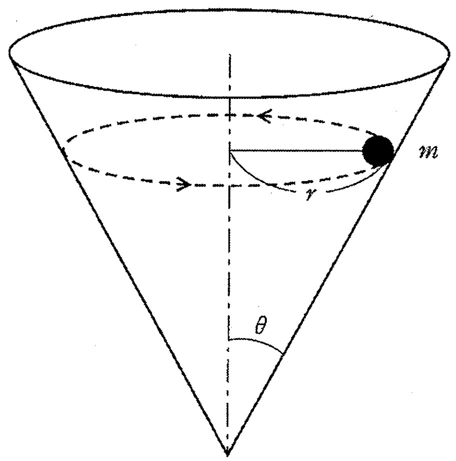
1 2013年 秋田大学 前期日程

次の文章中の空欄①，③～⑧，⑩を数式で，②，⑨を語句で埋め，解答欄に記入しなさい。

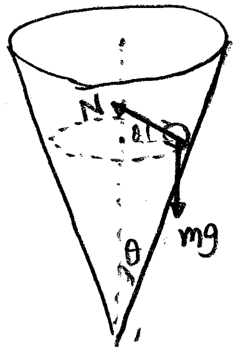
図のように頂角2θを持つ円すいが頂点を下に軸を鉛直方向に向けて固定されている。この円すいの内面に沿って質量mの小球を速さvで水平方向に打ち出したところ，小球が水平面内で等速円運動をした。円すいの軸から小球までの距離をr, 重力加速度の大きさをgとする。また，小球と円すい内面との摩擦と空気抵抗は無視できるものとする。



(i) ここで静止している観測者から見ると小球にかかる力は2つあり，鉛直下方向に大きさ(①)ではたらく(②)と円すい内面に対し垂直方向に大きさNではたらく垂直抗力がある。まず，鉛直方向の力のつり合いを考えると等式(③)が成立する。今度は円運動の円の中心方向について考えると，垂直抗力Nの水平方向成分が向心力としてはたらく。この向心力が質量mと加速度の大きさ(④)の積に等しくなることから，等式(⑤)が成立する。したがって，等式(③)と(⑤)より，円運動の半径rは，v, g, θを用いて，$r=$(⑥)となる。このときの周期Tは，v, g, θを用いて，$T=$(⑦)となる。

Ⓐ 静止した観測者が観測

→普通に力を描き，式を立てる
(重力＋接触点での力)



鉛直方向：つりあい
$N\sin\theta = mg$

水平面：円運動の運動方程式
$m\frac{v^2}{r} = N\cos\theta$

① mg ② 重力

③ $N\sin\theta = mg$

④ $\frac{v^2}{r}$

⑤ $m\frac{v^2}{r} = N\cos\theta$

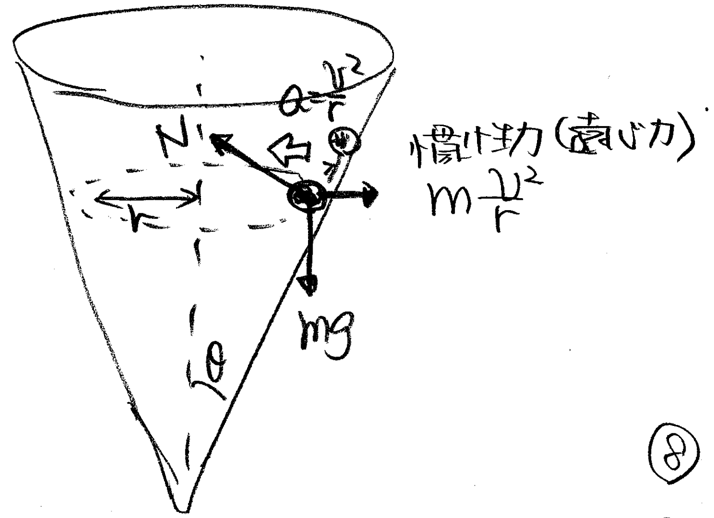
⑥ $m\frac{v^2}{r} = \frac{mg}{\tan\theta}$

$\therefore r = \frac{v^2\tan\theta}{g}$

⑦ $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi v\tan\theta}{g}$

(ii) 次に同じ状態を，小球と一緒に回転している観測者から見ると小球にはたらく力は3つあり，(i)に述べた2つの力の他に，円すいの軸から遠ざかる向きに慣性力として(⑧)の大きさではたらく(⑨)がある。この場合，円すいの斜面に沿う方向の力のつり合いより，等式(⑩)が成立する。これより半径rは，v, g, θを用いて$r=$(⑥)となることが確認できる。

Ⓑ 観測者に加速度がある ⇒ 観測する物体には
普通の力＋慣性力が働く



⑧ $m\frac{v^2}{r}$

⑨ 遠心力

⑩ つりあいなので，
どの方向に分解してもOK.

斜面方向は，
$mg\cos\theta = m\frac{v^2}{r}\sin\theta$

$\therefore r = \frac{v^2\tan\theta}{g}$

(同じ結果を得る)

答(i)① mg ②重力 ③ $mg = N\sin\theta$ ④ $\frac{v^2}{r}$ ⑤ $N\cos\theta = m\frac{v^2}{r}$ ⑥ $\frac{v^2}{g}\tan\theta$ ⑦ $\frac{2\pi v}{g}\tan\theta$

(ii)⑧ $\frac{mv^2}{r}$ ⑨遠心力 ⑩ $mg\cos\theta = \frac{mv^2}{r}\sin\theta$ または $\left(\cancel{g\cos\theta = \frac{v^2}{r}}\sin\theta\right)$

ばね定数 k[N/m]，自然長 l[m]で質量の無視できるつる巻きばねにつながれた，質量 m[kg]の小球の運動を考える。ばねが切れることはなく，ばねの弾性力の大きさは常にばねの伸びに比例する。また，ばねは伸び縮みするだけで曲がることはなく，小球がばねから受ける力は常にばねと平行である。以下の文章の $\boxed{}$ に適切な数式を入れよ。

問 1　図 1 のように，水平に置かれた十分大きな平板に，ばねの一端をとりつけ，その点を O とする。平板はなめらかで，小球と平板の間の摩擦は無視できる。

小球を平板上で，点 O を中心に半径 r[m]($r>l$)で等速円運動させた。小球の速さを v[m/s]とすると，等速円運動の角速度は，v，r を用いて，$\boxed{(1)}$ [rad/s]と表され，向心力の大きさは，m，v，r を用いて，$\boxed{(2)}$ [N]となる。また，小球がばねから受ける力の大きさは，k，r，l を用いて，$\boxed{(3)}$ [N]と表され，この力が向心力と等しいという条件から，角速度は，m，k，r，l を用いて，$\boxed{(4)}$ [rad/s]となる。このことから，角速度の上限値は $\boxed{(5)}$ [rad/s]となる。

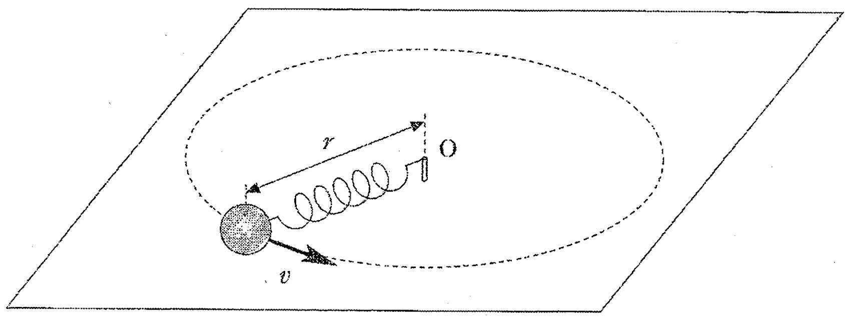


図 1

(1) $v=r\omega$

$\omega=\frac{v}{r}$

(2) $m\frac{v^2}{r}$

(3) ばねののびが $r-l$ より

$k(r-l)$

(4) 運動方程式

$mr\omega^2=k(r-l)$

$\omega=\sqrt{\frac{k(r-l)}{mr}}$

(5) $\omega=\sqrt{\frac{k(1-\frac{l}{r})}{m}}$　$r\to\infty$ で $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ が最大値.

答　問 1　(1) $\frac{v}{r}$　(2) $m\frac{v^2}{r}$　(3) $k(r-l)$　(4) $\sqrt{\frac{k(r-l)}{mr}}$　(5) $\sqrt{\frac{k}{m}}$

問 2　次に，図 2 のようにばねの一端を天井にとりつけ，その点を O とし，点 O から鉛直方向に鉛直軸をとる。以下，重力加速度の大きさを g[m/s^2]とする。

小球を，点 O からの距離 r[m]($r>l$)及びばねと鉛直軸がなす角度 θ を一定に保ちながら，水平面内で等速円運動させた。等速円運動の角速度を ω [rad/s]とすると，向心力の大きさは，m，r，θ，ω を用いて，$\boxed{(6)}$ [N]となる。また，小球がばねから受ける力の水平成分の大きさは，k，r，l，θ を用いて，$\boxed{(7)}$ [N]と表され，この力が向心力と等しいという条件から，角速度 ω は，m，k，r，l を用いて，$\boxed{(8)}$ [rad/s]となる。さらに，小球がばねから受ける力の鉛直成分の大きさは，k，r，l，θ を用いて，$\boxed{(9)}$ [N]である。この鉛直成分と重力がつりあう条件から，角度 θ は，$\cos\theta=\boxed{(10)}$ を満たすことがわかる。この関係を用いて，$\boxed{(8)}$ から k，l を消去すると，角速度は g，r，θ を用いて，$\boxed{(11)}$ [rad/s]と表される。また，以上のことから，等速円運動が実現するためには，$r>\boxed{(12)}$ [m]でなければならないことがわかる。

(6) $mr\sin\theta\cdot\omega^2$

(7) $k(r-l)\sin\theta$

(8)

$mr\sin\theta\omega^2=k(r-l)\sin\theta$

$\omega=\sqrt{\frac{k(r-l)}{mr}}$

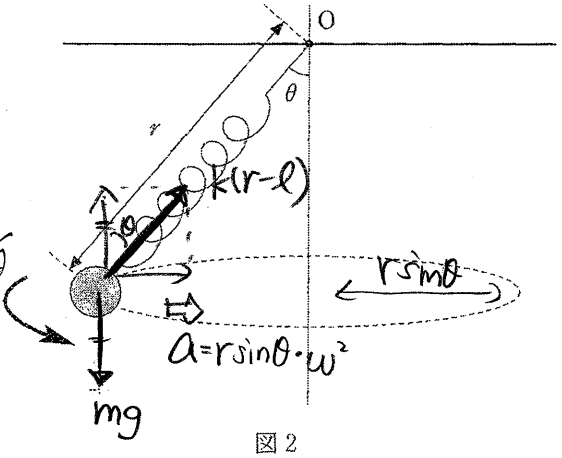


図 2

(11) (8)より

$k(r-l)=mr\omega^2$

なので

$\cos\theta=\frac{mg}{mr\omega^2}$

$\omega=\sqrt{\frac{g}{r\cos\theta}}$

(9) $k(r-l)\cos\theta$

(10) 鉛直方向のつりあい

$k(r-l)\cos\theta=mg$

$\cos\theta=\frac{mg}{k(r-l)}$

(12)

円運動が実現するのは

$0<\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき.

$0\leqq\cos\theta<1$

$0\leqq\frac{mg}{k(r-l)}<1$

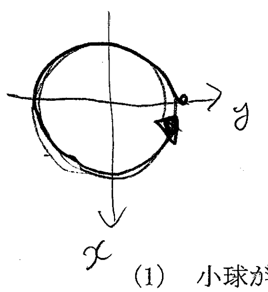
答　問 2　(6) $mr\omega^2\sin\theta$　(7) $k(r-l)\sin\theta$　(8) $\sqrt{\frac{k(r-l)}{mr}}$　(9) $k(r-l)\cos\theta$　(10) $\frac{mg}{k(r-l)}$

(11) $\sqrt{\frac{g}{r\cos\theta}}$　(12) $l+\frac{mg}{k}$

$\therefore r>l+\frac{mg}{k}$

3　2006年　東北大学　後期日程

円すいの内面に沿った小球の運動を考える。図１のように，円すいは頂点を下にして固定され，その軸は鉛直方向を向いている。円すいの頂点を座標の原点とし，xおよびy軸を水平面上に，z軸を円すいの軸方向にとる。図２はz軸と小球を含む平面における円すいの断面図である。円すいの頂角を2θ，小球の質量をm，重力加速度の大きさをgとし，小球の大きさおよび空気抵抗は無視できるものとする。以下の問いに答えよ。解答は所定の場所に記入せよ。なお，結果だけでなく，考え方や計算の過程も記せ。



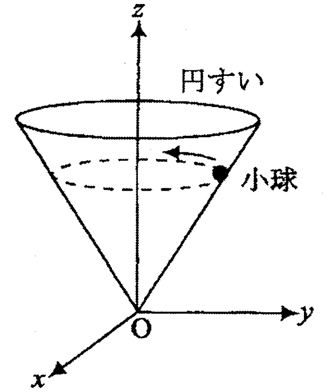


図１

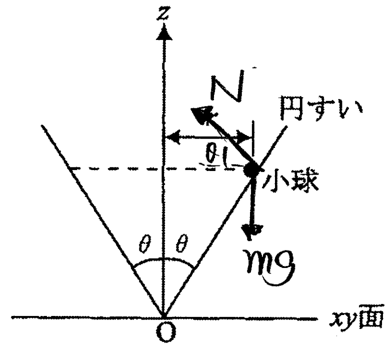


図２

(1)　小球が円すいの内面上で一定の高さを保ちながら，半径rの等速円運動をしている。ただし，小球と円すいとの間の摩擦は無視できるものとする。

(a)　斜面から受ける垂直抗力の大きさN，向心力の大きさF，小球の速さv，および円運動の角速度ωを，m，g，θ，rの中から必要なものを用いて表せ。

$N\sin\theta=mg$ より $N=\frac{mg}{\sin\theta}$，$F=N\cos\theta=\frac{mg}{\tan\theta}$，$m\frac{v^2}{r}=\frac{mg}{\tan\theta}$ より $v=\sqrt{\frac{gr}{\tan\theta}}$，$\omega=\frac{v}{r}=\sqrt{\frac{g}{r\tan\theta}}$

(b)　時刻tにおける小球の位置を$(x,\ y,\ z)$とする。x，y，zを，m，g，θ，r，tの中から必要なものを用いて表せ。ただし，$t=0$において$x=0$，$y=r$であり，円運動の向きはz軸の正方向から見て反時計回りとする。

$x=-r\sin\omega t=-r\sin\left(\sqrt{\frac{g}{r\tan\theta}}\,t\right)$，$y=r\cos\left(\sqrt{\frac{g}{r\tan\theta}}\,t\right)$，$z=\frac{r}{\tan\theta}$ 一定

(c)　小球の運動エネルギーをK，位置エネルギーをUとする。それらの和$E=K+U$および比$R=\dfrac{K}{U}$を，m，g，θ，rの中から必要なものを用いて表せ。ただし，小球が円すいの頂点にあるときの位置エネルギーを0とする。

$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{mgr}{2\tan\theta}$，$U=mg\frac{r}{\tan\theta}$　∴ $E=\frac{3mgr}{2\tan\theta}$，$R=\frac{1}{2}$

(2)　小球と円すいとの間に小さな動摩擦力F'が働く場合を考え，その動摩擦係数をμ'とする。動摩擦力は十分小さく，円運動の周期程度の短い時間内では小球の運動は等速円運動とみなして良い。この運動を近似的な円運動と呼ぶことにする。

失うときに正の値

(a)　小球が半径rの近似的な円運動をしているとき，F'の大きさ，および小球が単位時間あたりに失うエネルギーPを，m，g，θ，r，μ'の中から必要なものを用いて表せ。

$F'=\mu' N=\frac{\mu' mg}{\sin\theta}$，$P=\mu' N\cdot v=\frac{\mu' mg}{\sin\theta}\sqrt{\frac{gr}{\tan\theta}}$

(b)　長い時間では，近似的な円運動の半径rと角速度ωの両方または一方が徐々に変化する。rおよびωの変化について，次の文の中からそれぞれ正しいものを選び，(ア)～(ウ)の記号で答えよ。また，そう考えた理由を述べよ。

マサツの仕事分だけ E が減少する

(ア)　だんだん小さくなる。
(イ)　変化しない。
(ウ)　だんだん大きくなる。

$E=\frac{3mgr}{2\tan\theta}$ より E(小)→r(小)　∴rは(ア)

$\omega=\sqrt{\frac{g}{r\tan\theta}}$ より r(小)→ω(大)　∴ωは(ウ)

(3)　円すいと小球をエレベーターの中に入れ，エレベーターに乗っている観測者から見た小球の運動を考える。円すいはエレベーターに固定されており，問(1)と同じく，小球と円すいとの間の摩擦は無視できるものとする。

静止しているエレベーターで観測したとき，小球は等速円運動をしており，その半径はr_0，角速度はω_0であった。次に，エレベーターを鉛直上方にゆっくり加速していくと，小球は問(2)と同様に近似的な円運動を行うようになり，エレベーターの加速度に応じてその半径rと角速度ωが徐々に変化した。摩擦が無視できるとき，この過程ではケプラーの法則と同様に小球の運動に関する面積速度$\dfrac{1}{2}r^2\omega$は一定に保たれる。このことに注意して，エレベーターの加速度がaに達したときの小球の近似的な円運動の半径r_1を，g，a，r_0を用いて表せ。また，そのときの角速度ω_1を，g，a，ω_0を用いて表せ。ただし，エレベーターの加速度は十分にゆっくり変化するため，エレベーターの運動は各時点で等加速度直線運動とみなしてよいものとする。

$\frac{1}{2}\times r\times r\omega$ のこと　を使う

面 $\frac{1}{2}r_0^2\omega_0=\frac{1}{2}r_1^2\omega_1$　　見かけの $g'\to g+a$

$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{r_0\tan\theta}}$，$\omega_1=\sqrt{\frac{g+a}{r_1\tan\theta}}$ を代入して

$r_0^{\frac{3}{2}}g^{\frac{1}{2}}=r_1^{\frac{3}{2}}(g+a)^{\frac{1}{2}}$　∴ $r_1=r_0\left(\frac{g}{g+a}\right)^{\frac{1}{3}}$

また $\omega_1=\sqrt{\frac{r_0(g+a)}{r_1 g}}\,\omega_0=\omega_0\left(\frac{g+a}{g}\right)^{\frac{2}{3}}$

答(1) (a) $N:\dfrac{mg}{\sin\theta}$，$F:\dfrac{mg}{\tan\theta}$，$v:\sqrt{\dfrac{gr}{\tan\theta}}$，$\omega:\sqrt{\dfrac{g}{r\tan\theta}}$　(b) $x:-r\sin\left(\sqrt{\dfrac{g}{r\tan\theta}}\cdot t\right)$

$y:r\cos\left(\sqrt{\dfrac{g}{r\tan\theta}}\cdot t\right)$，$z:\dfrac{r}{\tan\theta}$　(c) $E:\dfrac{3mgr}{2\tan\theta}$，$R:\dfrac{1}{2}$

(2) (a) $F':\dfrac{\mu' mg}{\sin\theta}$，$P:\dfrac{\mu' mg}{\sin\theta}\sqrt{\dfrac{gr}{\tan\theta}}$　(b) r(ア)，ω(ウ)　(3) $r_1:\left(\dfrac{g}{g+a}\right)^{\frac{1}{3}}r_0$，$\omega_1:\left(\dfrac{g+a}{g}\right)^{\frac{2}{3}}\omega_0$