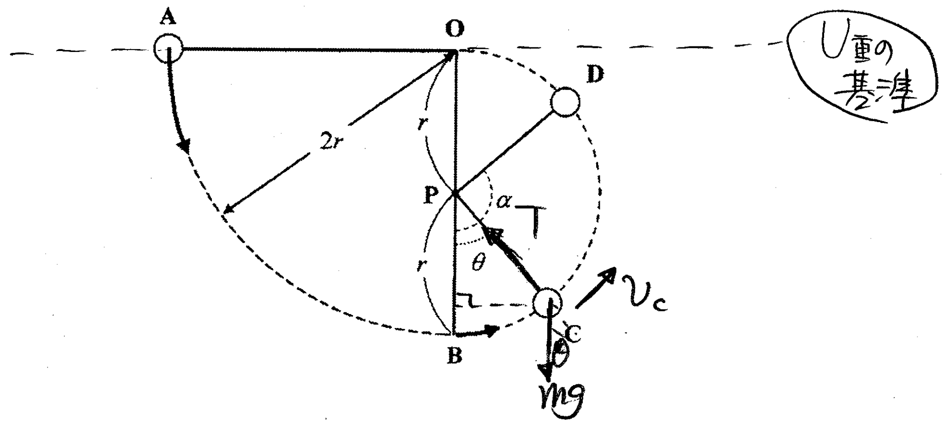
1 2006年　島根大学 前期日程

鉛直面内で，図のように長さ$2r$のひもの一端をO点に固定し，他方に質量mの小球をつけO点と同じ高さのA点より静かに離した。点Oから鉛直下方に距離r離れた点Pにはピンがつけられており，小球は最下点Bを通過した後，点Pを中心に半径rの円運動を始めた。その後，小球が鉛直線となす角がαとなる点Dを通過した直後から，ひもがたわみ始めた。重力加速度をgとして次の問いに答えよ。ただし，ひもの質量や伸び縮み，および空気の摩擦は考えないものとする。



(1)　鉛直線となす角がθの点(図のC点)を通過するときの，小球の速さv_Cを求めよ。ただし$0<\theta<\alpha$とする。

AC間で力学的エネルギー保存則

$0=\frac{1}{2}mv_c^2-mgr(1+\cos\theta)$　　$\therefore v_c=\sqrt{2gr(1+\cos\theta)}$

(2)　小球がC点を通過するときのひもの張力Tを求めよ。

円運動中→運動方程式

$m\frac{v_c^2}{r}=T-mg\cos\theta$　　$\therefore T=mg(2+3\cos\theta)$

(3)　$\cos\alpha$を求めよ。

T=0となるので

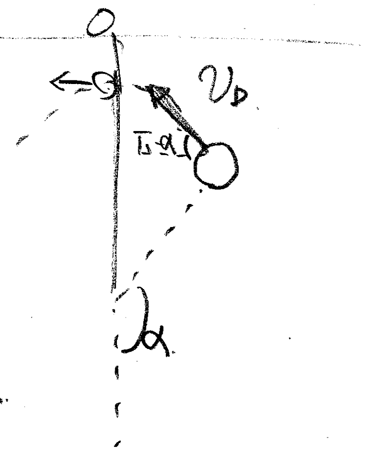
$0=mg(2+3\cos\alpha)$　　$\therefore \cos\alpha=-\frac{2}{3}$

(4)　小球は点Dを通過した後，いくらの高さまであがるか。最高点でのBからの高さhを求めよ。

斜方投射

→最高点で速度0でないことに注意

(水平成分が残る)



$v_D=\sqrt{2gr(1-\frac{2}{3})}=\sqrt{\frac{2}{3}gr}$

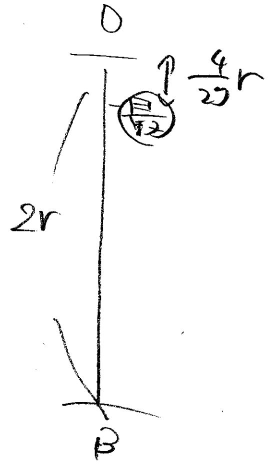
従って水平成分は

$v_D\cos(\pi-\alpha)=\sqrt{\frac{2}{3}gr}\times\frac{2}{3}=\sqrt{\frac{8}{27}gr}$

Oから最高点までd下だとして

$0=\frac{1}{2}m(\frac{8}{27}gr)-mgd$

$\therefore d=\frac{4}{27}r$



∴Bからの高さは

$2r-\frac{4}{27}r=\frac{50}{27}r$

答 (1) $v_c=\sqrt{2gr(1+\cos\theta)}$　(2) $T=mg(2+3\cos\theta)$　(3) $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$　(4) $\frac{50}{27}r$

[2] 2014年　埼玉大学　後期日程

解答はすべての答案用紙の所定の欄に，最後の結果に至るまでのすじみちがわかるように記入すること。

内径 r，中心点 O の固定された球の内面を，物体 P および Q が運動している場合を考える。球の内面はなめらかであり，空気抵抗は無視できるものとする。物体 P，Q は大きさの無視できる物体として扱い，物体 P の質量を m，物体 Q の質量を $\frac{m}{5}$ とする。重力加速度の大きさは g とする。

まず図 1 のように，物体 P が一定の速さ v_0 で水平回転運動をしている場合を考える。OP は鉛直方向と一定角度 θ_0 をなし，$0<\theta_0<\frac{\pi}{2}$ とする。

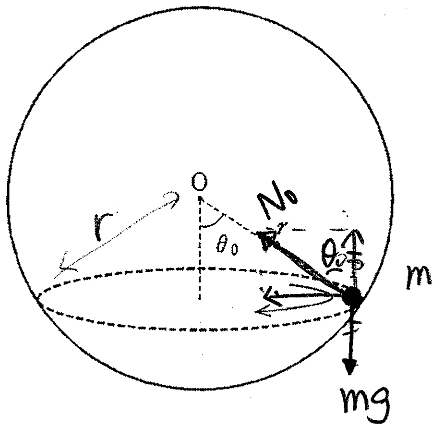


図 1

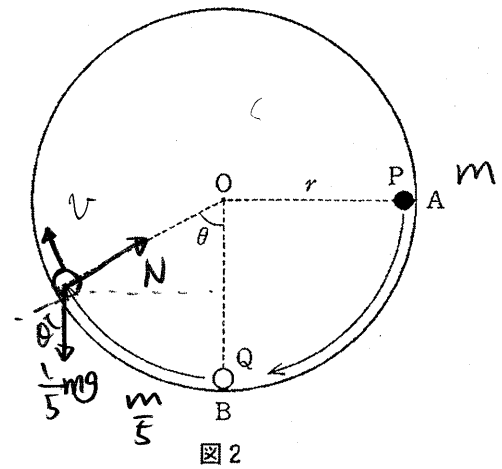


図 2

問 1　物体 P に働く球の内面からの垂直抗力 N_0 を，m，g，θ_0 を用いて表せ。また，物体 P の速さ v_0 を r，g，θ_0 を用いて表せ。

鉛直方向のつりあい

$N_0\cos\theta_0=mg$ より $N_0=\frac{mg}{\cos\theta_0}$

水平面→ $ma=F$

$m\frac{v_0^2}{r\sin\theta_0}=\frac{mg}{\cos\theta_0}\sin\theta_0$ より $v_0=\sqrt{\frac{gr\sin^2\theta_0}{\cos\theta_0}}$

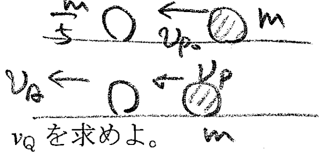
問 2　物体 P の水平回転運動の周期 T を，r，g，θ_0 を用いて表せ。θ_0 が限りなく 0 に近いときの T を求めよ。また，θ_0 の増大に伴い T の値は大きくなるか小さくなるか，答えよ。

$T=\frac{2\pi r\sin\theta_0}{v_0}=2\pi\sqrt{\frac{r\cos\theta_0}{g}}$

$\theta_0\to0$ とすると，$\cos\theta_0\to1$ なので，$T=2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$

$\theta_0\to$ 大 なら $T\to$ 小 （cosだからね）

次に図 2 のように，物体 P が鉛直方向の円に沿って運動する場合を考える。中心点 O と等しい高さの球の内面点 A に静止した物体 P を置き，手を離して球の内面に沿って運動させる。最下点 B において，物体 P は物体 Q と非弾性衝突する。反発係数 $e=\frac{4}{5}$ として，以下の問に答えよ。



問 3　衝突直前の物体 P の速さ v_{P0}，および，衝突直後の P，Q の速さ v_P，v_Q を求めよ。

力学的エネルギー保存則

$mgr=\frac{1}{2}mv_{P0}^2$

$\therefore v_{P0}=\sqrt{2gr}$

左を正として

運　$mv_{P0}=mv_P+\frac{m}{5}v_Q$

反　$\frac{4}{5}=-\frac{v_P-v_Q}{v_{P0}}$

$\therefore v_P=\frac{7}{10}v_{P0}=\frac{7}{5}\sqrt{\frac{gr}{2}}$

$v_Q=\frac{3}{2}v_{P0}=3\sqrt{\frac{gr}{2}}$

問 4　衝突後，物体 Q は円の内面に沿って運動する。OQ が鉛直方向となす角度を θ として，角度 θ における物体 Q の速さ v と物体 Q に働く垂直抗力 N の大きさを求めよ。

力 より：

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}mv_Q^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}mv^2+\frac{1}{5}mgr(1-\cos\theta)$

$v=\sqrt{v_Q^2-2gr(1-\cos\theta)}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}+2\cos\theta\right)gr}$

$ma=F$ より

$\frac{1}{5}m\frac{v^2}{r}=N-\frac{1}{5}mg\cos\theta$

$N=\frac{1}{5}mg\left(\frac{5}{2}+2\cos\theta\right)+\frac{1}{5}mg\cos\theta$

$=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\cos\theta\right)mg$

問 5　物体 Q が円の内面から離れるときの位置の角度を θ_1 として，$\cos\theta_1$ を求めよ。

$N=0$ で離れる

$N=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\cos\theta_1\right)mg=0$

$\therefore \cos\theta_1=-\frac{5}{6}$

答　問 1　$N_0=\frac{mg}{\cos\theta_0}$，$v_0=\sin\theta_0\sqrt{\frac{gr}{\cos\theta_0}}$　問 2　$T=2\pi\sqrt{\frac{r\cos\theta_0}{g}}$，$\theta_0\fallingdotseq0$ のとき $T\fallingdotseq2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$，小さくなる　問 3　$v_{P0}=\sqrt{2gr}$，$v_P=\frac{7}{5}\sqrt{\frac{gr}{2}}$，$v_Q=3\sqrt{\frac{gr}{2}}$　問 4　$v=\sqrt{\left(\frac{5}{2}+2\cos\theta\right)gr}$，$N=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\cos\theta\right)mg$　問 5　$\cos\theta_1=-\frac{5}{6}$

3　2013年　北海道大学　前期日程

図1のように，点Oに一端が固定された長さl [m]の糸の他端に質量m[kg]の小球を取りつけ，この小球を鉛直面内で運動させる。以下の文章中の $\boxed{(1)}$ ～ $\boxed{(9)}$ に適切な数式または数値を入れよ。ただし，糸は伸び縮みせず，その質量は無視できる。また，重力加速度の大きさをg[m/s^2]とする。

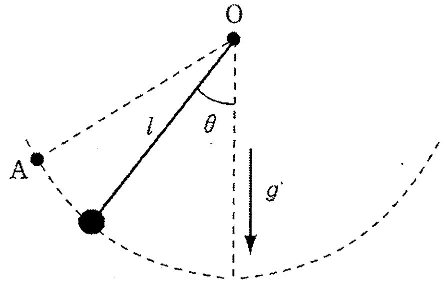


図1

（単振り子は今回のテーマから外れるので別のキカイに。）

$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ※覚えておいてよい

問1　小球を点Aまで糸がたるまないように移動し，その後静かに離したところ，小球は単振り子として最下点を中心に振動した。振幅が十分に小さいときの周期は $\boxed{(1)}$ [s]である。

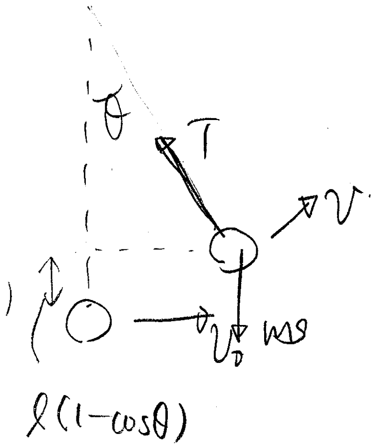
つぎに，小球を最下点で静止させた後，速さv_0 [m/s]で水平方向に打ち出した。このとき，小球は糸がたるむことなく運動した。糸と鉛直下向きとのなす角度がθ[rad]のとき，重力による小球の位置エネルギーは最下点にあるときと比べ $\boxed{(2)}$ [J]増加し，小球の速さは $\boxed{(3)}$ [m/s]となる。また，糸の張力は $\boxed{(4)}$ [N]となる。糸がたるむことなく小球が単振り子として振動するためにはθの大きさが常に$\frac{\pi}{2}$以下となる必要があるので，$v_0^2 \leqq \boxed{(5)}$ でなければならない。

(2) 右図より

$mgl(1-\cos\theta)$

(3) $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1-\cos\theta)$

$v=\sqrt{v_0^2-2gl(1-\cos\theta)}$



(4) $ma=F$

$m\frac{v^2}{l} = T - mg\cos\theta$

$T=\frac{mv_0^2}{l}+mg(3\cos\theta-2)$

(5) $\theta=\frac{\pi}{2}$のとき，

$v_0^2-2gl(1-0)\leqq 0$

$v_0^2 \leqq 2gl$

問2　図1の単振り子を加速度a[m/s^2]で水平方向に等加速度運動する車に乗せた。単振り子を車内で観察すると，図2のように糸が斜めに傾き，小球は点Pで静止していた。このときの糸の張力は$2mg$ [N]であったとすると，糸が鉛直下向きとなす角度θ_1は $\boxed{(6)}$ [rad]，車の加速度aは $\boxed{(7)}$ [m/s^2]である。また，点Pを中心として小球を小さく振動させると，その周期は $\boxed{(1)}$ の $\boxed{(8)}$ 倍となる。

この小球を再び点Pに静止させた後，糸に垂直な方向に速さv_1 [m/s]で打ち出した。このとき糸がたるむことなく小球が点Oを中心に円運動を行うためには，$v_1^2 \geqq \boxed{(9)}$ という条件を満たす必要がある。

図より

(6) $\theta_1=\frac{\pi}{3}$

(7) $a=\sqrt{3}g$

(8) $g'=2g$

とすればよいので，

$T'=\frac{1}{\sqrt{2}}T$

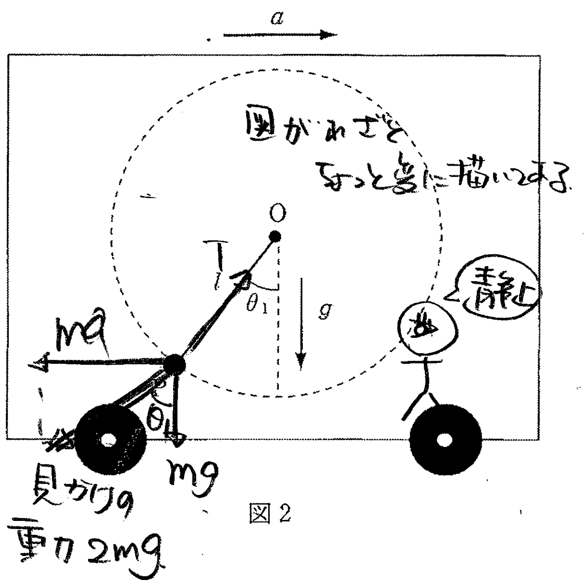


図2

(9) (4)で求めたTについて，

$g\to 2g$として，$\theta=\pi$でも正であればよいので，

$\frac{mv_1^2}{l}+m\cdot 2g(-3-2)\geqq 0$

$v_1^2 \geqq 10gl$

※計算し直すのではなく前までの設問を極力利用すること。

答　問1(1) $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$　(2) $mgl(1-\cos\theta)$　(3) $\sqrt{v_0^2-2gl(1-\cos\theta)}$　(4) $\left(\frac{mv_0^2}{l}\right)-2mg+3mg\cos\theta$

(5) $2gl$

問2(6) $\frac{\pi}{3}$　(7) $g\sqrt{3}$　(8) $\frac{1}{\sqrt{2}}$　(9) $10gl$