1 2012年 熊本大学 前期日程

図1のように，質量mのおもりにばね定数がkと$2k$のばねの一端を取り付け，それぞれのばねの他端を台の壁に固定した。台の面に平行な方向をx方向とする。ばねの質量は無視でき，台と物体の間には摩擦はないものとし，重力加速度をgとする。

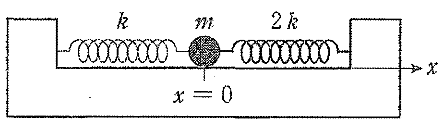


図1

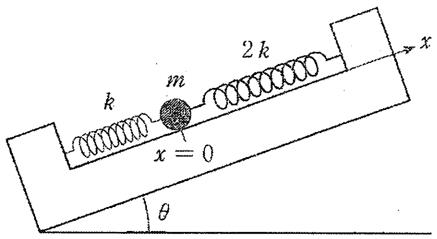
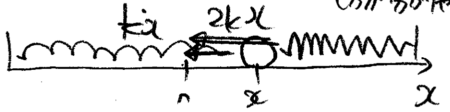


図2

まず，台を水平に置いた。このとき，両方のばねは自然の長さになっており，静止しているおもりの位置を原点$x=0$とする。そのおもりを$x=l_0$の位置までずらして，時刻$t=0$で静かに放すとおもりは単振動した。以下の問いに答えよ。

(問1) 変位xでのおもりにかかる復元力Fを求めよ。また，単振動の周期Tをm，kを用いて表せ。

※変位xは必ず正にとる。(その方が分かりやすい)

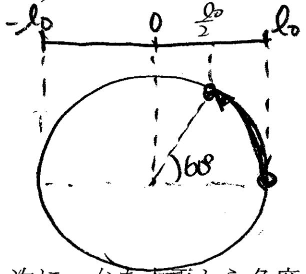


左図より) $F=-3kx$

単振動 → 運動方程式

$m(-\omega^2 x)=-3kx$ $\therefore \omega=\sqrt{\frac{3k}{m}}$，$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$

(問2) 手放されたおもりの変位が，最初に$x=\frac{l_0}{2}$になる時刻t_1をm，kで表せ。



図のように考えると，

$t_1=\frac{1}{6}T=\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{3k}}$

次に，台を水平から角度θだけ傾けると，図2のようにおもりは釣り合いの位置で静止した。この静止位置を新たに原点とし，斜面の上向きをx軸の正方向とする。

ばねが自然の長さになるようにおもりを手でもどし，静かに放すとおもりは単振動した。以下の問いに答えよ。

→ つりあいを原点とすると，

単振動は $\begin{cases} F=-\bigcirc x \\ a=-\omega^2 x \end{cases}$ となり楽！

(指定されなかったら，つりあい＝振動中心を原点に取る)

(問3) 単振動の振幅Aと角振動数ωをm，k，g，θのうち，必要なものを用いて表せ。

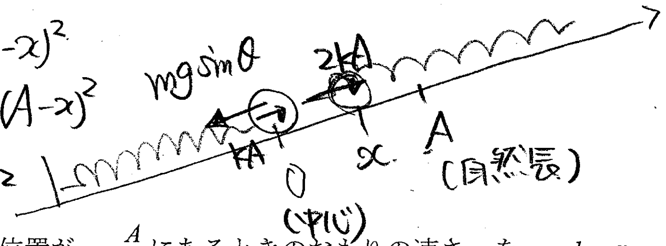
$mg\sin\theta=kA+2kA$

$\therefore A=\frac{mg\sin\theta}{3k}$ $\omega=\sqrt{\frac{3k}{m}}$

(問4) 変位xでのおもりの速さをvとする。変位xにおけるおもりの力学的エネルギーEをm，k，g，θ，A，x，vを用いて表せ。ただし，位置エネルギーの基準点は$x=0$の高さとする。

$E=\frac{1}{2}mv^2+mgx\sin\theta+\frac{1}{2}k(A-x)^2+\frac{1}{2}2k(A-x)^2$

$=\frac{1}{2}mv^2+mgx\sin\theta+\frac{3}{2}k(A-x)^2$



(問5) (問4)の結果を用いて，おもりの位置が$x=\frac{A}{3}$にあるときのおもりの速さv_1をm，k，g，θ，で表せ。

$x=A$と，$x=\frac{A}{3}$で力学的エネルギー保存則。

$0+mgA\sin\theta+0=\frac{1}{2}mv_1^2+mg\frac{A}{3}\sin\theta+\frac{3}{2}k\left(\frac{2}{3}A\right)^2$

$v_1^2=\frac{4}{3}gA\sin\theta-\frac{4}{3}\frac{kA^2}{m}$

$=\frac{4}{3}\left(\frac{mg^2\sin^2\theta}{3k}-\frac{mg^2\sin^2\theta}{9k}\right)$

$=\frac{8}{27}\frac{m}{k}g^2\sin^2\theta$

$\therefore v_1=\frac{2\sqrt{6}}{9}\sqrt{\frac{m}{k}}g\sin\theta$

単振動は『通常の力学的エネルギー保存則』の他に『単振動のエネルギー保存』が使えると非常に便利です。両方を使いこなせるように!!

(別) $\frac{1}{2}3kA^2=\frac{1}{2}3k\left(\frac{1}{3}A\right)^2+\frac{1}{2}mv_1^2$

$v_1^2=\frac{8}{3}\frac{k}{m}A^2$

答(問1) $F=-3kx$，$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$ (問2) $t_1=\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{3k}}$ (問3) $A=\frac{mg\sin\theta}{3k}$，$\omega=\sqrt{\frac{3k}{m}}$

(問4) $E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{3}{2}k(A-x)^2+mgx\sin\theta$ (問5) $v_1=\frac{2\sqrt{6}}{9}\sqrt{\frac{m}{k}}g\sin\theta$

$v_1=\frac{2\sqrt{6}}{3}\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\frac{mg\sin\theta}{3k}$

$=\frac{2\sqrt{6}}{9}\sqrt{\frac{m}{k}}g\sin\theta$

の方が楽なはず。

2 2015年 宇都宮大学 前期日程

図 1(a)のように，質量の無視できるばね定数 k[N/m]のばねの上端を天井に固定する。その後，ばねの下端に質量 m[kg]の物体を静かにつるしたところ，図 1(b)のように，自然の長さから x_0[m]だけ伸びた位置で静止した。このときのばねの下端の位置を原点 O とし，鉛直下向きに x 軸をとる。

以下の問いについて，計算過程も記入して答えよ。ただし，物体は x 軸方向でのみ運動し，空気抵抗は無視できるものとする。また，重力加速度の大きさを g[m/s^2]とし，重力による位置エネルギーの基準面を原点 O とする。問題または解答用紙に指示がある場合は，必ず計算過程も記入すること。

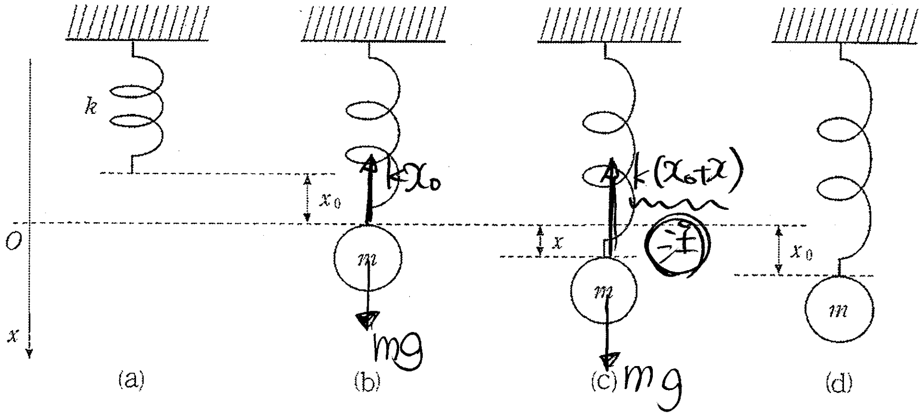


図 1

問 1 図 1(b)に示した x_0[m]を求めよ。

力のつりあい

$mg = kx_0$ より $x_0 = \frac{mg}{k}$ [m]

問 2 図 1(b)の状態から，ばねが自然の長さになるまで物体を持ち上げ，静かに手を離すと振動した。物体が図 1(c)の位置にあるとき，物体がばねから受ける力と重力の合力 F[N]を求めよ。

上図より $F = mg - k(x_0 + x)$

$= -kx$ [N] (問1を利用)

問 3 振動している物体が図 1(c)の位置にあるときの運動方程式を導出し，振動の周期 T[s]を求めよ。

$$m(-\omega^2 x) = -kx$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ [rad/s]}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \text{ [s]}$$

問 4 振動している物体の最大速度の大きさを v_{max} [m/s]とする。

(1) 振動している物体が図 1(b)の位置にあるときの力学的エネルギー E_1[J]を求めよ。

↳ 中心なので，速さは最大 v_{max}

$$E_1 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 + 0 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 + \frac{(mg)^2}{2k} \text{ [J]}$$

(2) 振動している物体が図 1(d)の位置にあるときの力学的エネルギー E_2[J]を求めよ。

↳ $v=0$

$$E_2 = 0 - mgx_0 + \frac{1}{2}k(2x_0)^2 = -\frac{(mg)^2}{k} + 2\frac{(mg)^2}{k} = \frac{(mg)^2}{k} \text{ [J]}$$

(3) v_{max} [m/s]を求めよ。

$E_1 = E_2$ (力学的エネルギー保存則)より.

$$\frac{1}{2}mv_{max}^2 + \frac{(mg)^2}{2k} = \frac{(mg)^2}{k}$$

$$v_{max} = g\sqrt{\frac{m}{k}} \text{ [m/s]}$$

別 単振動のエネルギー保存を使うと.

(b) (d)

$$\frac{1}{2}mv_{max}^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}kx_0^2$$

$$v_{max}^2 = \frac{k}{m}\cdot\left(\frac{mg}{k}\right)^2$$

$$v_{max} = g\sqrt{\frac{m}{k}} \text{ [m/s]}$$

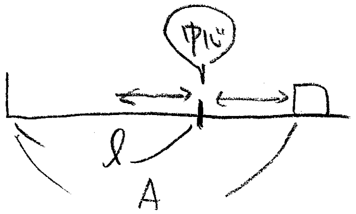
答 問 1 $x_0 = \frac{mg}{k}$ [m] 問 2 $F = -kx$ [N] ($F = mg - k(x_0 + x)$) 問 3 $ma = -kx$， $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ [s]

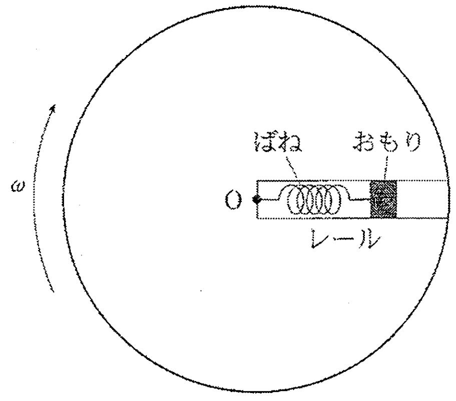
問 4 (1) $E_1 = \frac{m^2g^2}{2k} + \frac{1}{2}mv^2{}_{max}$ [J] (2) $E_2 = \frac{m^2g^2}{k}$ [J] (3) $v_{max} = g\sqrt{\frac{m}{k}}$ [m/s]

3　2011 年　金沢大学　後期日程

図 2a のように水平な円板の半径方向にレールを取り付け，レール上に大きさの無視できる質量 m[kg]のおもりを置いた。おもりはレール上のみを動く。円板の中心 O にばねの一端を固定し，もう一端をおもりに取り付けた。ばねの自然長は l[m]，ばね定数は k[N/m]とする。重力加速度の大きさを g[m/s^2]とする。問 1 から問 6 までは，おもりとレールの間の摩擦は無視する。

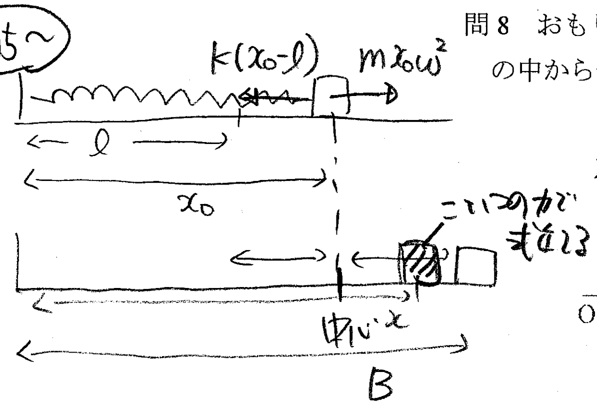
はじめ円板は静止している。おもりを円板の外側に引っ張ってばねの長さを A[m]とし，時刻 0[s]で手を離すと，おもりは単振動をはじめた。





円板を鉛直上方から見た図

図 2 a



簡単な設問では覚えておいて使ってもOK

問 1　おもりの単振動の振幅と周期を求めなさい。

振幅: $A-l$ [m]　　周期 $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ [s]

問 2　最初にばねが自然長 l になる時刻を求めなさい。

$\frac{1}{4}T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$ [s]

問 3　おもりの加速度の大きさの最大値を求めなさい。

↳幅で最大　$ma = -k(x-l)$ より $a_{max} = \frac{k}{m}(A-l)$ [m/s^2]

問 4　おもりの速さの最大値を求めなさい。

力　$\frac{1}{2}k(A-l)^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$　　$v_0 = (A-l)\sqrt{\frac{k}{m}}$ [m/s]

次に，円板が水平面内で，O を中心に一定の角速度ω [rad/s]で回転している場合を考える。

問 5　おもりが振動することなく円板に対し静止しているとき，ばねの長さを求めなさい。

図より) $k(x_0-l) = mx_0\omega^2$　　$\therefore x_0 = \frac{k}{k-m\omega^2}l$ [m]

重要!

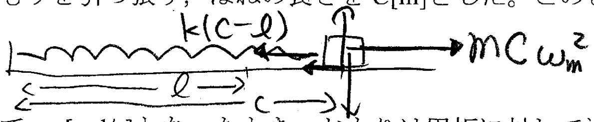
問 6　問 5 の状態から，ばねの長さが B[m]となるまで円板の外側におもりを引っ張り，離すと，おもりは円板に対して単振動をはじめた。単振動の振幅と周期を求めなさい。

図より. 振幅: $B - x_0 = B - \frac{k}{k-m\omega^2}l$ [m]　　$\therefore \omega = \sqrt{\frac{k-m\omega^2}{m}}$

運動方程式 $ma = -k(x-x_0) + mx\omega^2$
$= -(k-m\omega^2)\left\{x - \frac{k}{k-m\omega^2}x_0\right\}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k-m\omega^2}}$ [s]

次に，おもりとレールの間に摩擦力が働く場合を考える。静止摩擦係数はμとする。円板が静止した状態で，円板の外側におもりを引っ張り，ばねの長さを C[m]とした。このとき，おもりは静止していた。



問 7　円板の角速度が徐々に増して ω_m [rad/s]となったとき，おもりは円板に対して滑りはじめた。ω_mの大きさを求めなさい。

$mC\omega_m^2 = k(C-l) + \mu mg$
↳このとき，最大摩擦力
$\therefore \omega_m = \sqrt{\frac{k(C-l)+\mu mg}{mC}}$

問 8　おもりに働く静止摩擦力 f [N]と円板の角速度ωとの関係を表すグラフを，図 2b の選択肢の中から選び，記号で答えなさい。ただし，fは円板の中心 O から外向きを正とする。

$f + mC\omega^2 = k(C-l)$
$f = k(C-l) - mC\omega^2$

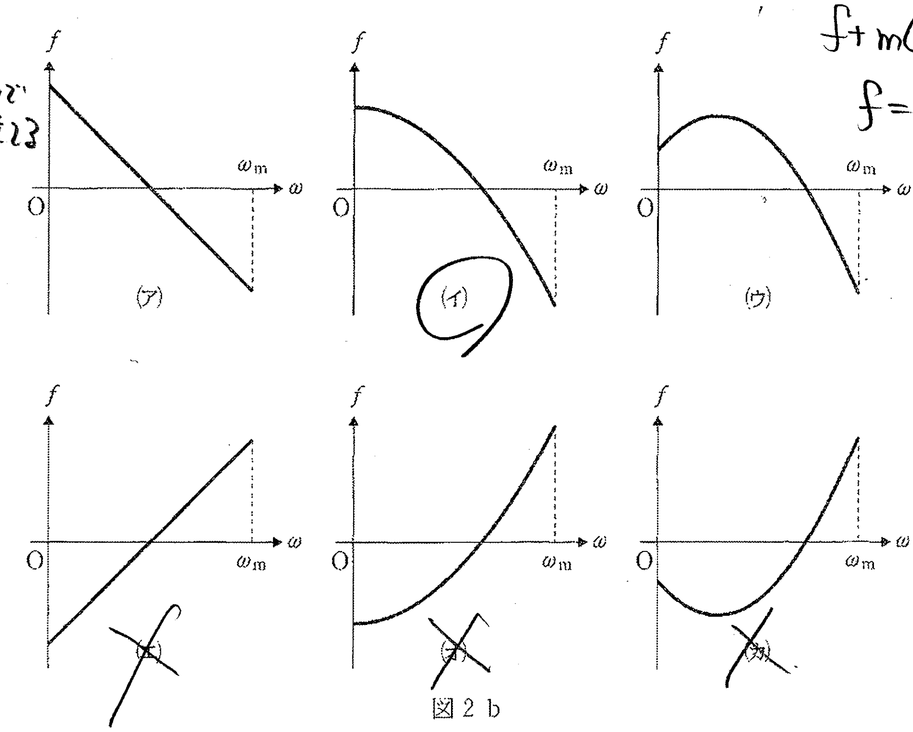


図 2 b

問 9　$\omega = 0$ および$\omega = \omega_m$ での f の値をそれぞれ求めなさい。

$\omega=0$のとき，$f = k(C-l)$

$\omega=\omega_m$のとき　$f = -\mu mg$.

答　問 1　振幅 $A-l$、周期 $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$　問 2　$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$　問 3　$(A-l)\frac{k}{m}$　問 4　$(A-l)\sqrt{\frac{k}{m}}$

問 5　$\frac{k}{k-m\omega^2}l$　問 6　振幅 $B-\frac{k}{k-m\omega^2}l$、周期 $2\pi\sqrt{\frac{m}{k-m\omega^2}}$　問 7　$\omega_m = \sqrt{\frac{k(C-l)+\mu mg}{mC}}$

問 8　(イ)　問 9　$\omega=0$ のとき $f=k(C-l)$，$\omega=\omega_m$ のとき $f=-\mu mg$