1 2014年　弘前大学　前期日程

図1のように，エレベーターの床にばねの一端を固定して垂直が保たれるよう設置し，他端におもりを取り付ける。おもりの質量を m，重力加速度の大きさを g，また，ばねの自然の長さを l_0，ばね定数を k とする。ばねの質量は無視でき，空気抵抗の影響も無視できるとして以下の問いに答えなさい。

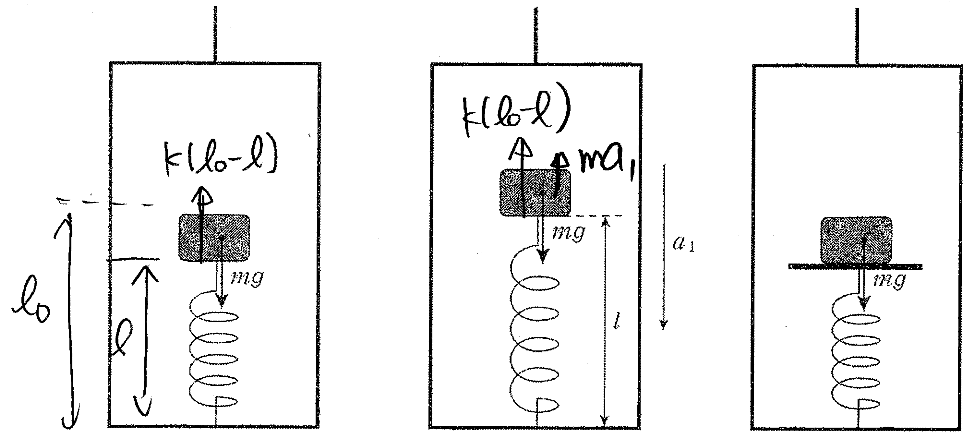


図1　　図2　　図3

問1　静止しているエレベーターの中で，おもりを床に触れない状態で静止させた。そのときのばねの長さを求めなさい。

$$k(l_0-l)=mg$$
$$l=l_0-\frac{mg}{k}$$

問2　次に，静止していたエレベーターを，図2のように鉛直下向きに一定の大きさ a_1 の加速度である時間だけ加速させた。エレベーターが加速され始めるまでおもりは静止していたとする。

(1)　加速されている間，エレベーターとともに動く観測者には，おもりに対して慣性力がはたらくように見える。ばねの長さが l のときに，エレベーター内部の観測者から見たおもりにはたらく合力を，鉛直上向きを正として答えなさい。

$$F=k(l_0-l)+ma_1-mg.$$

(2)　加速されている間，おもりはエレベーターに対し相対的に，つり合いの位置を中心とした単振動をする。中心となる位置でのばねの長さを求めなさい。

F=0より　$l=l_0-\dfrac{m(g-a_1)}{k}$

(3)　ばねが最も伸びた瞬間にエレベーターの加速を終え，そのときの速度を保って下降させ続けた。この後おもりが床に触れることがないようにするための，最初の加速度の大きさ a_1 の条件式を求めなさい。ただし，おもりが床に触れるのはばねの長さが0になったときとする。

「新つりあい」が中心，振幅 $\dfrac{ma_1}{k}$ で単振動していたものが突如「最初のつりあい」が中心，振幅 $\dfrac{2ma_1}{k}$ での単振動に変わる。

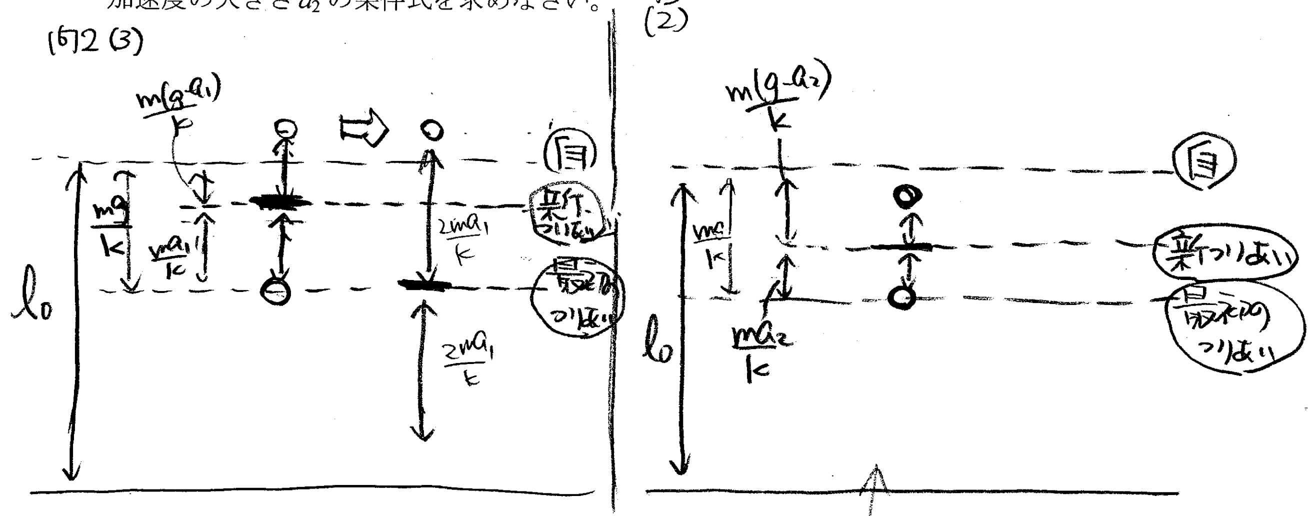
条件は　$l_0-\dfrac{mg}{k}>\dfrac{2ma_1}{k}$　$\therefore\ a_1<\dfrac{kl_0}{2m}-\dfrac{1}{2}g$

問3　次に，再びエレベーターを静止させ，ばねからおもりを取り外し，図3のように厚さと質量の無視できる板を水平に取り付け，その上におもりをのせて静止させた。そして，エレベーターを鉛直下向きに一定の大きさ a_2 の加速度で加速させた。おもりが板と接しているときに板から受ける垂直抗力の大きさを N，また，エレベーター内部の観測者から見た，鉛直上向きが正となるおもりの加速度を a とする。

(1)　おもりが板と接しているときの，おもりの鉛直方向の運動方程式を書きなさい。

$$ma=N+ma_2-mg.$$

(2)　この後おもりが板から離れることなく一体となって運動し続けるための，エレベーターの加速度の大きさ a_2 の条件式を求めなさい。



答　問1　$l_0-\dfrac{mg}{k}$　問2(1)　$-k(l-l_0)+ma_1-mg$　(2)　$l_0-\dfrac{m}{k}(g-a_1)$　(3)　$a_1<\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{kl_0}{m}-g\right)$

問3(1)　$ma=N+ma_2-mg$　(2)　$a_2<\dfrac{g}{2}$

図のようになればOK（自然長を超えない）

$\therefore\ \dfrac{2ma_2}{k}<\dfrac{mg}{k}$　　$a_2<\dfrac{1}{2}g.$

$\boxed{2}$ 2014年　岩手大学　前期日程

一辺の長さが a[m]で，一様な密度 ρ [kg/m^3]をもつ立方体を水に浮かべる。立方体は鉛直方向に動くとし，その際の水の抵抗および水面の変化は無視できる。水の密度を ρ_w [kg/m^3]，重力加速度を g[m/s^2]とし，以下の問いに答えよ。

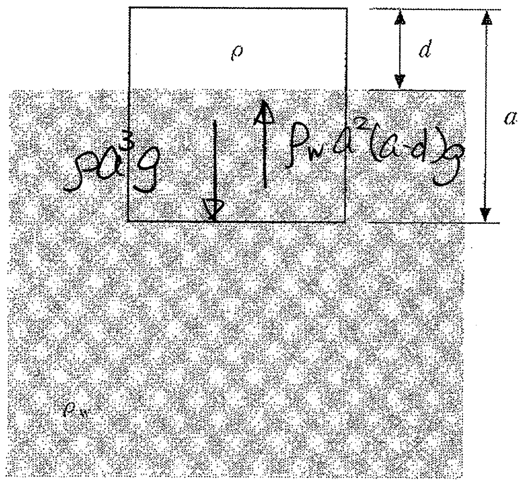


図 11

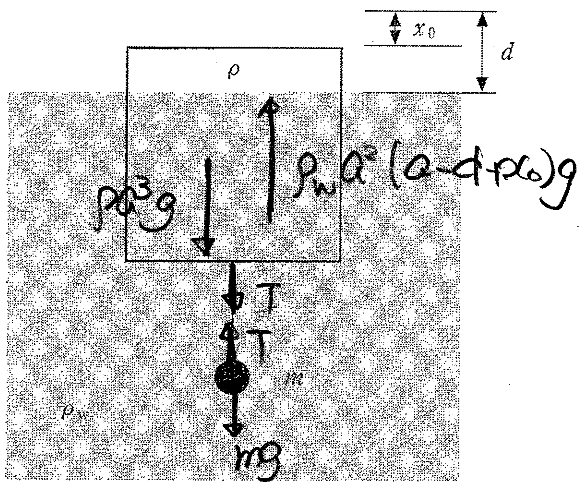


図 12

〔Ⅰ〕立方体を水面に浸したところ，図 11 のように，底面を水平にして上面を水面から d[m] $\left(d<\dfrac{a}{2}\right)$だけ出して静止した。

物体が押しのけた水の重さに等しい

(1)　立方体にはたらく重力と浮力を求めよ。

$\rho a^3 g$ [N]　　$\rho_w a^2(a-d)g$ [N]

(2)　水面からの高さ d を求めよ。

力のつり合いより

$\rho a^3 g = \rho_w a^2(a-d)g$　　$a-d = \dfrac{\rho}{\rho_w}a$　　$d = \dfrac{\rho_w-\rho}{\rho_w}a$[m]

〔Ⅱ〕次に，図 12 のように，立方体の下に質量 m[kg]のおもりを糸でつり下げたところ，立方体の上面が x_0 [m]($x_0<d$)だけ下がり静止した。おもりと糸の体積，糸の質量は無視できるものとする。

(3)　立方体の上面の下降距離 x_0 を，a，ρ_w，m を用いて表せ。

$$\begin{cases} mg = T \\ T+\rho a^3 g = \rho_w a^2(a-d+x_0)g \end{cases}$$

$\therefore mg = \rho_w a^2 x_0 g$　　$x_0 = \dfrac{m}{\rho_w a^2}$[m]

別 浮力の増加分

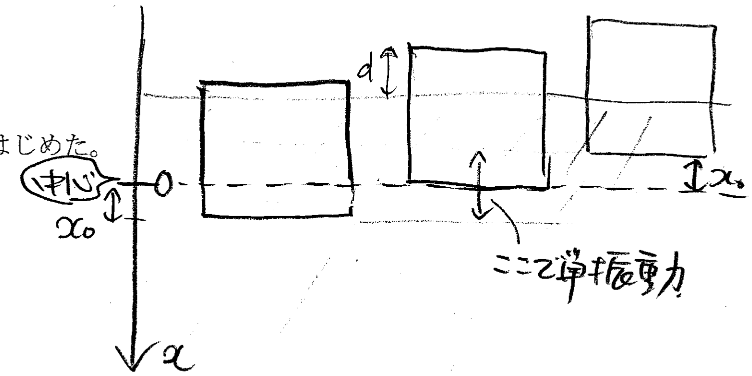
$\rho_w a^2 x_0 g$ が

おもりの重力 mg と

一致するはず

$\rho_w a^2 x_0 g = mg$，$x_0 = \dfrac{m}{\rho_w a^2}$[m]

糸を切ったところ，立方体は単振動をはじめた。



(4)　単振動の振幅を求めよ。

$x_0 = \dfrac{m}{\rho_w a^2}$[m]

(5)　単振動の周期を，a，ρ，ρ_w，g を用いて表せ。導出過程も示すこと。

座標 x [m]での運動方程式は

$\rho a^3(-\omega^2 x) = \rho a^3 g - \rho_w a^2(a-d+x)g = -\rho_w a^2 g\cdot x$

(6)　立方体の上面が，水面からの高さ d の位置を通過するときの速さを，a，ρ，ρ_w，g，x_0 を用いて表せ。

中心

$\therefore \omega = \sqrt{\dfrac{\rho_w g}{\rho a}}$ [rad/s]

$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\rho a}{\rho_w g}}$ [s]

単振動のエネルギー保存より

$\cancel{\frac{1}{2}}\rho_w a^2 g\cdot x_0^2 = \cancel{\frac{1}{2}}\rho a^3\cdot v^2$

$v = x_0\sqrt{\dfrac{\rho_w g}{\rho a}}$ [m/s]

($v = A\omega$ でもOK)

答〔Ⅰ〕(1)　重力：$\rho a^3 g$ [N]、浮力：$\rho_w a^2(a-d)g$ [N]　(2)　$d=\left(1-\dfrac{\rho}{\rho_w}\right)a$ [m]

〔Ⅱ〕(3)　$x_0=\dfrac{m}{\rho_w a^2}$ [m]　(4)　x_0 または $\dfrac{m}{\rho_w a^2}$ [m]　(5)　$2\pi\sqrt{\dfrac{\rho a}{\rho_w g}}$ [s]　(6)　$x_0\sqrt{\dfrac{\rho_w g}{\rho a}}$ [m/s]

3　2011年　名古屋大学　前期日程

図１のように，ばね，円盤，おもり，とめ具からなる装置がある。ばねはフックの法則に従い，ばね定数は k で，鉛直方向に伸縮する。ばねの一端は水平な地面に，他端は水平に保たれた厚さが無視できる硬い円盤の中心に固定されている。円盤の中心に質量 m のおもりが載せられており，小さなとめ具で固定されている。なお，このとめ具は遠隔操作でおもりの固定を外すことができる。

ばねの自然長での円盤の中心を原点Oとし，鉛直上向きに y 軸をとる。また，重力は鉛直下向きに作用し，重力加速度を g とする。ばね，円盤，とめ具は質量を無視できる。以下の設問に答えよ。解答は，答案紙の所定の欄の中に書け。計算欄には，答にいたるまでの過程の**要点**(法則，関係式，論理，計算など)を書け。

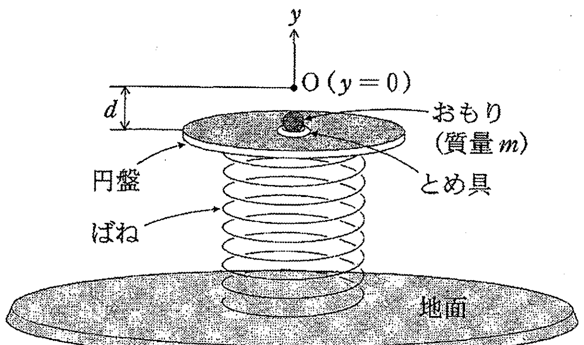


図１

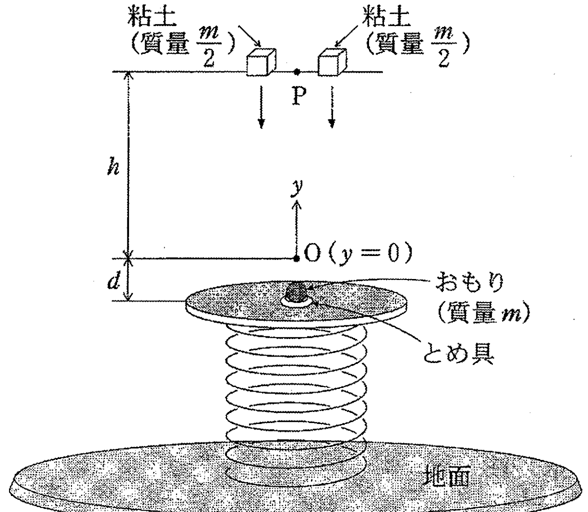
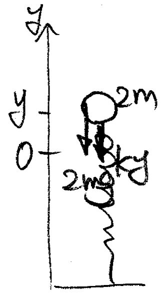


図２



はじめに，円盤はばねが自然長から d だけ縮んだ位置で静止していた。

設問(1)：ばね定数 k を，m，d，g の中から適切なものを用いて表せ。

力のつりあい　$mg=kd$ より　$k=\frac{mg}{d}$

図２のように，点Oから高さ h だけ上方の点を点Pとする。点Pを含む水平面内の，点Pに対して互いに点対称な関係にある２つの位置から，質量 $\frac{m}{2}$ で大きさが無視できる２つの粘土を同時に静かに放した。粘土は自由落下し，おもりやとめ具と触れることなく円盤と完全非弾性衝突をした。その直後から円盤は，粘土，おもりと一体となったまま，水平を保って単振動をした。空気抵抗は無視できる。

設問(2)：粘土が円盤に衝突した直後の円盤の速さ V_1 を，m，d，g，h の中から適切なものを用いて表せ。

直前の粘土の速さは　$v_0=\sqrt{2g(h+d)}$

運動量保存は　∴ $mv_0=2mV_1$　∴ $V_1=\frac{1}{2}v_0=\sqrt{\frac{1}{2}g(h+d)}$

設問(3)：円盤がおもりと２つの粘土と一体となって単振動をしているときの円盤の座標を y，上向きの加速度を a とする。円盤，おもり，粘土を一体とみなして，その運動方程式を，y，a，m，k，g，h の中から適切なものを用いて記せ。また，単振動の中心位置を示す座標 y_a を，m，d，g，h の中から適切なものを用いて表せ。

kが使えない。

$2ma=-ky-2mg=-k\left(y+\frac{2mg}{k}\right)$　∴ $y_a=-\frac{2mg}{k}=-2d$

設問(3)の単振動中に，とめ具を遠隔操作し，ばねが最も縮んだ瞬間におもりの固定を外した。その後，ばねが自然長になったとき，円盤からおもりに作用する上向きの力が０になり，おもりは円盤から離れた。

中心からdずれている　　中心から2dずれている

設問(4)：おもりが円盤から離れた直後のおもりの速さ V_2 を，m，d，g，h の中から適切なものを用いて表せ。

単振動のエネルギー保存

$\frac{1}{2}\cdot 2mV_1^2+\frac{1}{2}kd^2=\frac{1}{2}\cdot 2mV_2^2+\frac{1}{2}k(2d)^2$　∴ $V_2=\sqrt{V_1^2-\frac{3kd^2}{2m}}=\sqrt{\frac{1}{2}g(h-2d)}$

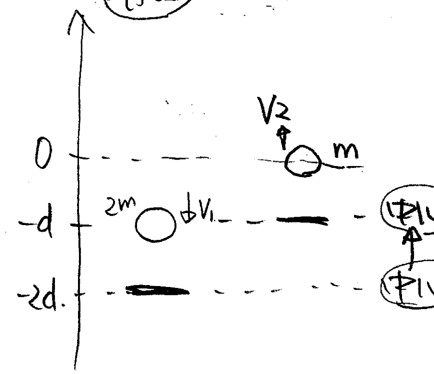
設問(5)：次の文章中の空欄 (a) ～ (c) に入る最も適切な語句または数式を答えよ。ただし，数式の場合は，m，d，g，h の中から適切なものを用いること。

kなし → (1)からk消去

おもりが円盤から離れた後，おもりと円盤との再衝突を考えないとすると，円盤は粘土と一体となったまま周期 $T=$ (a) の単振動を続ける。このとき，単振動の中心位置を示す座標は $y_b=$ (b) であり，その振幅は，おもりが円盤から離れる前の円盤の単振動の振幅よりも (c) くなる。

$-d$　小さ

質量mなので　$2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}$



元の振幅は

$\frac{1}{2}2mV_1^2+\frac{1}{2}kd^2=\frac{1}{2}kA^2$ より $A=\sqrt{d^2+\frac{2m}{k}V_1^2}$

新しい振幅は

$\frac{1}{2}mV_2^2+\frac{1}{2}kd^2=\frac{1}{2}kA'^2$ より $A'=\sqrt{d^2+\frac{m}{k}V_2^2}$

$=\sqrt{-d^2+\frac{m}{k}V_1^2}$

答　設問(1)　$k=\frac{mg}{d}$　設問(2)　$V_1=\sqrt{\frac{g(h+d)}{2}}$　設問(3)　$2ma=-ky-2mg$，$y_a=-2d$

設問(4)　$V_2=\sqrt{\frac{g(h-2d)}{2}}$　設問(5)　(a)　$2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}$　(b)　$-d$　(c)　小さ