1　2011 年　神戸大学　前期日程

地球を周回する衛星の運動について，問 1〜4 に答えなさい。解答の導出過程も示しなさい。ただし，万有引力定数を G，地球の質量を M とし，文中に与えられた物理量の他に解答に必要な物理量があれば，それを表す記号はすべて各自で定義し，解答欄に明示しなさい。

問 1　図 1 の破線のように，衛星が半径 R の円軌道上を運動するとき，衛星の加速度の向きと大きさを求めなさい。さらに，そのときの衛星の速さを求めなさい。

加速度の向き… 中心Oに向かう向き,

運動方程式

$$m\frac{v^2}{R}=G\frac{Mm}{R^2}$$

より

$$a=\frac{v^2}{R}=\frac{GM}{R^2}$$

$$v=\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

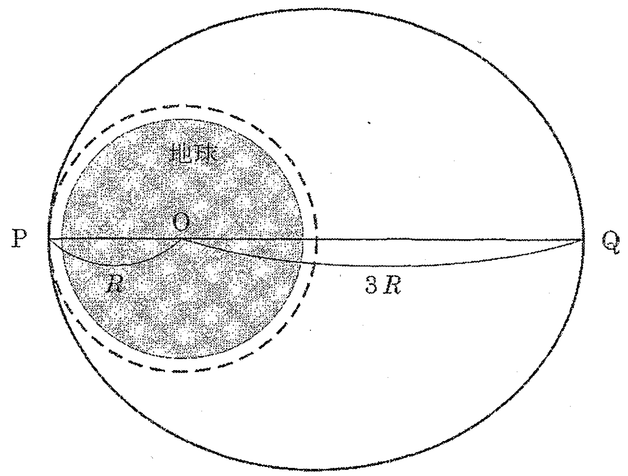


図 1

問 2　問 1 の状態から衛星を進行方向に加速すると，衛星は楕円軌道に沿って周回するか，無限遠方に飛び去る。衛星が周回運動するための，加速直後の速さに対する条件を求めなさい。

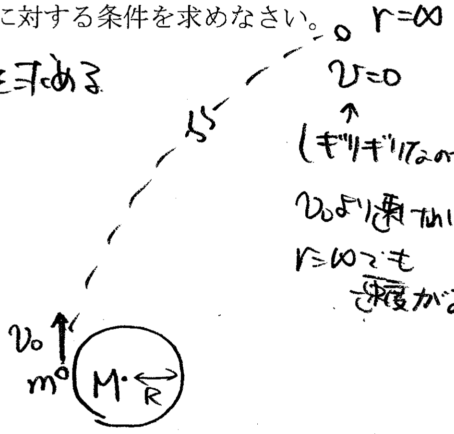
ギリギリ無限遠に到達する初速度v_0を求める

力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_0^2-G\frac{Mm}{R}=0+0$$

$$v_0=\sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

条件は $v<\sqrt{\frac{2GM}{R}}$



(ギリギリなので)

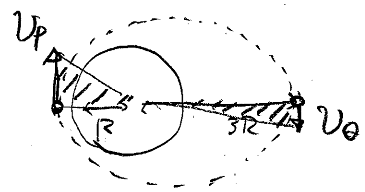
v_0より速ければ r=∞でも速度がある.

問 3　衛星が周回運動しているとき，その面積速度は一定である。衛星が図 1 のような楕円軌道を描いているとき，地球に最も近い点 P と地球から最も離れた点 Q における衛星の速さの比を求めなさい。ただし，地球の中心を O としたとき，$|OP|=R$，$|OQ|=3R$ とする。

面積速度一定の法則

$$\frac{1}{2}Rv_P=\frac{1}{2}\cdot 3Rv_Q$$

$$\therefore v_P : v_Q = v_P : \frac{1}{3}v_P = 3:1$$



問 4　問 3 において，点 P における衛星の速さを求めなさい。

問3に加え，力学的エネルギー保存則を立てる.

$$\frac{1}{2}mv_P^2-G\frac{Mm}{R}=\frac{1}{2}mv_Q^2-G\frac{Mm}{3R}$$

$$v_P^2-\left(\frac{1}{3}v_P\right)^2=\frac{2GM}{R}\left(1-\frac{1}{3}\right)$$

$$v_P=\sqrt{\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{8}_{2}}\times\frac{2GM}{R}\times\frac{2}{\cancel{3}}}$$

$$=\sqrt{\frac{3GM}{2R}}$$

答　問 1　向き…中心 O の向き　大きさ…$\frac{GM}{R^2}$　速さ…$\sqrt{\frac{GM}{R}}$　問 2　$v<\sqrt{\frac{2GM}{R}}$

問 3　P の速さ：Q の速さ＝3：1　問 4　$\sqrt{\frac{3GM}{2R}}$

2 2008年　金沢大学　前期日程

図２のように，半径r[m]の円軌道上を，質量$2m$ [kg]の衛星が一定の速さv_0 [m/s]でまわっている。天体の質量をM[kg]，万有引力定数をG[N・m²/kg²]とする。

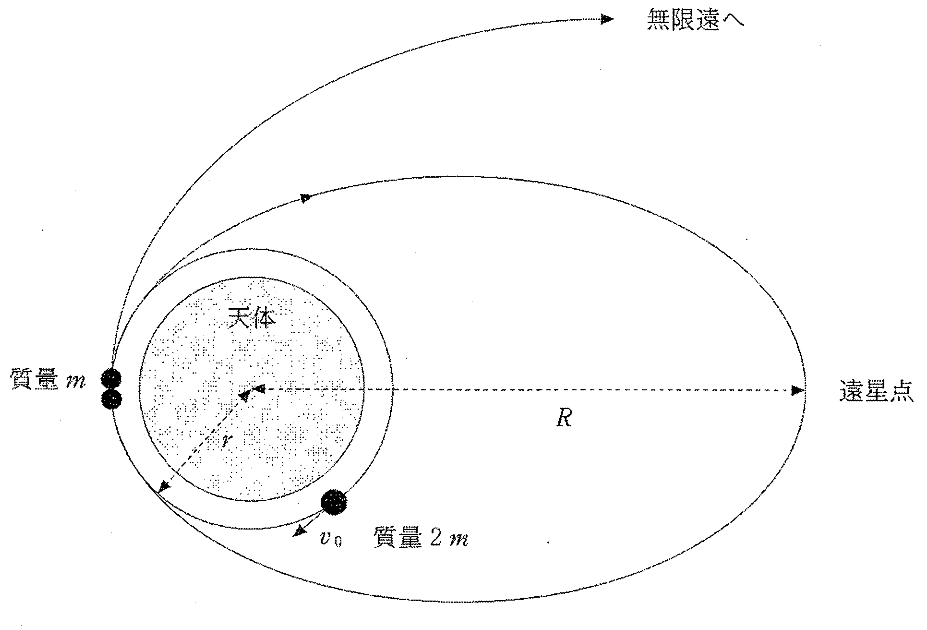


図２

(1)　v_0の大きさをr，G，Mを用いて求めよ。

円運動→ ma=F

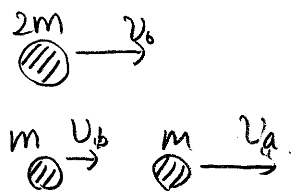
$$2m\frac{v_0^2}{r}=G\frac{M\cdot 2m}{r^2} \qquad \therefore v_0=\sqrt{\frac{GM}{r}}\ [\mathrm{m/s}]$$

(2)　衛星の周期をr，G，Mを用いて求めよ。

$$T=\frac{2\pi r}{v_0}=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}\ [\mathrm{s}]$$

図２のように，衛星を質量が等しい２つの衛星ａと衛星ｂに瞬間的に分離させた。分離の前後で衛星の運動方向に変化はなく，衛星ａは加速し衛星ｂは減速したとする。分離直後の衛星ａと衛星ｂの相対速度の大きさをv[m/s]とする。

(3)　分離直後の衛星ａと衛星ｂの速さv_a [m/s]とv_b [m/s]を運動量保存則より，vとv_0を用いて求めよ。



運動量保存則

$2mv_0=mv_a+mv_b$

相対速度vより

$v=v_a-v_b$

これらを解くと、

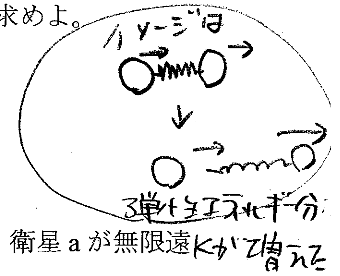
$$v_a=\frac{2v_0+v}{2}\ [\mathrm{m/s}],\quad v_b=\frac{2v_0-v}{2}\ [\mathrm{m/s}]$$

(4)　分離にはエネルギーが必要である。必要なエネルギーをmとvを用いて求めよ。

分離による運動エネルギー変化ΔKは

$$\Delta K=\frac{1}{2}m\left(v_0+\frac{1}{2}v\right)^2+\frac{1}{2}m\left(v_0-\frac{1}{2}v\right)^2-\frac{1}{2}2mv_0^2$$

$$=\frac{1}{4}mv^2\ [\mathrm{J}]$$　これだけのエネルギーが必要



(5)　分離直後の相対速度が大きすぎると衛星ａは無限遠に飛び去ってしまう。衛星ａが無限遠に飛び出す最小の相対速度の大きさvをv_0だけを用いて求めよ。

無限遠へ行く最小の速度v_{a0}は、

$$\frac{1}{2}mv_{a0}^2-G\frac{Mm}{r}=0 \quad より \quad v_{a0}=\sqrt{\frac{2GM}{r}}=\sqrt{2}v_0\ [\mathrm{m/s}]$$

(6)　衛星ａと衛星ｂの相対速度の大きさが問(5)の条件より小さいとき，衛星ａの軌道は遠星点がR[m]の楕円軌道となる。ケプラーの第二法則より遠星点での速さをR，r，v_aを用いて求めよ。

$$\frac{2v_0+v}{2}=\sqrt{2}v_0$$

$$\therefore v=2(\sqrt{2}-1)v_0\ [\mathrm{m/s}]$$

(6)　面積速度一定の法則のこと、

$$\frac{1}{2}rv_a=\frac{1}{2}Rv_a'$$

$$v_a'=\frac{r}{R}v_a\ [\mathrm{m/s}]$$

答 (1) $v_0=\sqrt{\dfrac{GM}{r}}$ [m/s]　(2) $2\pi r\sqrt{\dfrac{r}{GM}}$ [s]　(3) $v_a=\dfrac{2v_0+v}{2}$ [m/s]、$v_b=\dfrac{2v_0-v}{2}$ [m/s]

(4) $\dfrac{1}{4}mv^2$ [J]　(5) $v=2(\sqrt{2}-1)v_0$ [m/s]　(6) $\dfrac{r}{R}v_a$ [m/s]

$\boxed{3}$ 2011 年　大阪大学　後期日程

質量 m の人工衛星 S の，地球のまわりの運動を考える。ただし，地球の質量を M，半径を R とする。また，万有引力定数を G とする。

I．人工衛星 S が，地球の中心 O 点のまわりを，速さ v で半径 $r(r>R)$ の等速円運動をしている。ただし，地球は十分重く動かないものとし，他の天体の影響は無視できるものとする。また，問 4 と問 5 を除き，大気の影響は無視してよい。

問 1　人工衛星 S の速さ v を求めよ。

運動方程式 $m\frac{v^2}{r}=G\frac{Mm}{r^2}$ より $v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$

問 2　この円運動の周期 T を求めよ。ただし，答は v を用いずに表せ。

$T=\frac{2\pi r}{v}=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$

次に，人工衛星 S の力学的エネルギー(位置エネルギーと運動エネルギーの和)について考察する。ただし，位置エネルギーは，無限遠を基準とする。

問 3　人工衛星 S の力学的エネルギーを，G，M，m，r，R のうち必要なものを用いて表せ。

$E=\frac{1}{2}mv^2-G\frac{Mm}{r}=-\frac{GMm}{2r}$

これまで，地球のまわりの大気の存在を無視してきたが，ここで，その影響を考えてみよう。大気の影響は非常に小さいので，軌道の変化は極めてゆっくりであり，十分短い時間に限れば，人工衛星 S の運動は等速円運動と見なせる。初め，速さ v で半径 r の等速円運動をしていた人工衛星 S が，数年の間に大気の抵抗力のために，力学的エネルギーを 4%だけ失い，速さ v_F で半径 r_F の円運動をするようになった。すなわち，初めの円軌道を運動している人工衛星 S の力学的エネルギー E と，エネルギーを少し失った後の人工衛星 S の力学的エネルギー E_F の間に，$E_F-E=-0.04|E|$ なる関係が成り立っていた。

$E_F-E=-0.04|E|$ より

問 4　$\frac{r_F}{r}$ を有効数字 2 桁まで求めよ。

$-\frac{GMm}{2r_F}+\frac{GMm}{2r}=-0.04\cdot\frac{GMm}{2r}$　　$\frac{r_F}{r}=\frac{1}{1.04}\fallingdotseq 0.96$

問 5　エネルギーを失う前後の速さの比，すなわち，$\frac{v_F}{v}$ を小数点以下 2 桁まで求めよ。ただし，$|x|<<1$ のときに成り立つ近似式 $\sqrt{1+x}\fallingdotseq 1+\frac{1}{2}x$ を用いてよい。

$v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$ より．$\frac{v_F}{v}=\sqrt{\frac{r}{r_F}}=\sqrt{1+0.04}\fallingdotseq 1+\frac{1}{2}\times 0.04=1.02$.

II．

ケプラーは，ティコ・ブラーエが残した太陽系の運動に関する膨大な観測データを解析して，次のケプラーの法則を発見した。(図 1 を参照せよ。)

第 1 法則：惑星は，太陽を焦点の一つとする楕円軌道を描く。
第 2 法則：惑星が太陽のまわりに描く面積速度(惑星と太陽を結ぶ線分が単位時間に通過する面積)は常に一定である。
第 3 法則：惑星の公転周期の 2 乗は，楕円軌道の長半径の 3 乗に比例する。

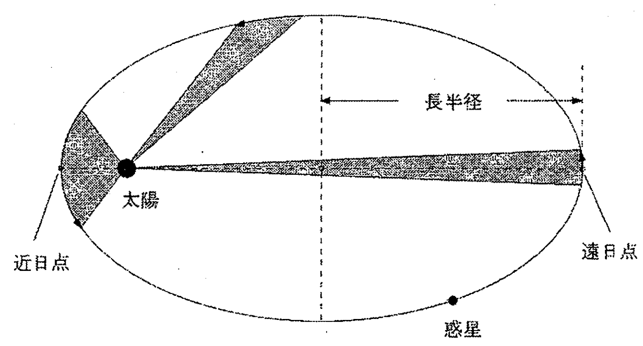


図 1

ケプラーの第 2 法則は，無限のかなたから太陽に近づいてきて，双曲線や放物線を描いて再び無限のかなたに飛び去っていくような彗星(すいせい)の運動に対しても成り立つことが知られている。また，ケプラーの法則は，ニュートンの万有引力の法則で説明され，太陽を地球，惑星を人工衛星と置き換えても成り立つ。

再び人工衛星の問題を考えよう。以下では，他の天体の影響および地球のまわりの大気の影響は無視できるものとする。半径 r_P ($r_P>R$) の円軌道上を運動していた人工衛星 S が図 2 の軌道 K_1 の P 点に来たときに，軌道に沿って瞬間的に加速され，速さ v_P になった。それ以後，人工衛星 S は，地球の中心 O 点を焦点の一つとし，P 点を近地点，Q 点を遠地点(ただし，$\overline{OQ}=r_Q$ ($r_Q>r_P$))とする楕円軌道(図 2 の軌道 K_2)を描いた。

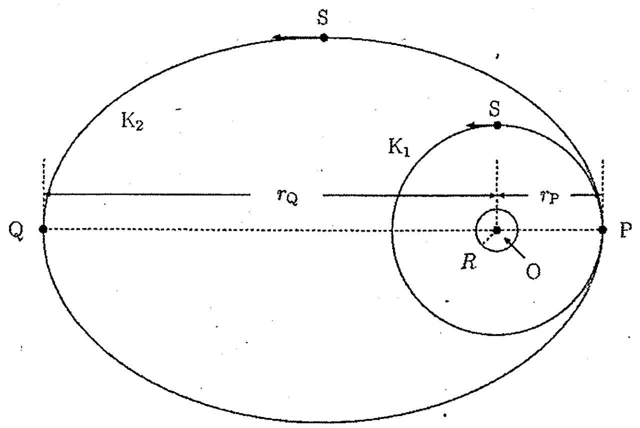


図2

問6　この楕円軌道の周期T_2と，元の円軌道の周期T_1の比$\frac{T_2}{T_1}$を，r_Pとr_Qを用いて表せ。

ケプラー第3法則より　$T_1^2=kr_P^3$，　$T_2^2=k\left(\frac{r_P+r_Q}{2}\right)^3$　　∴ $\frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{r_P+r_Q}{2r_P}\right)^{\frac{3}{2}}$

問7　ケプラーの法則と，力学的エネルギーの保存則に注意して，軌道K_2上のQ点に来たときの人工衛星Sの速さv_Q，および，OQ間の距離r_Qを，r_P，v_P，G，M，mのうち必要なものを用いて表せ。

いつものように
(カ) $\frac{1}{2}mv_P^2-G\frac{Mm}{r_P}=\frac{1}{2}mv_Q^2-G\frac{Mm}{r_Q}$
(面) $\frac{1}{2}r_Pv_P=\frac{1}{2}r_Qv_Q$

次に，人工衛星Sが再びP点に来たとき，軌道に沿って瞬間的に加速され，v_Pよりもさらに大きな速さv_P'になった。

問8　地球の引力を振り切って無限のかなたに飛び去ることができるv_P'の最小値v_0を求めよ。

いつものように (カ) $\frac{1}{2}mv_0^2-G\frac{Mm}{r_P}=0$　　∴ $v_0=\sqrt{\frac{2GM}{r_P}}$

v_P'が，問8で求めた最小値v_0のk倍(ただし，$k>1$とする)だったとき，人工衛星Sは，図3のように，ある直線ℓに限りなく近づく双曲線軌道K_3を描いた。ただし，O点と直線ℓの距離を$b(b>r_P)$とする。

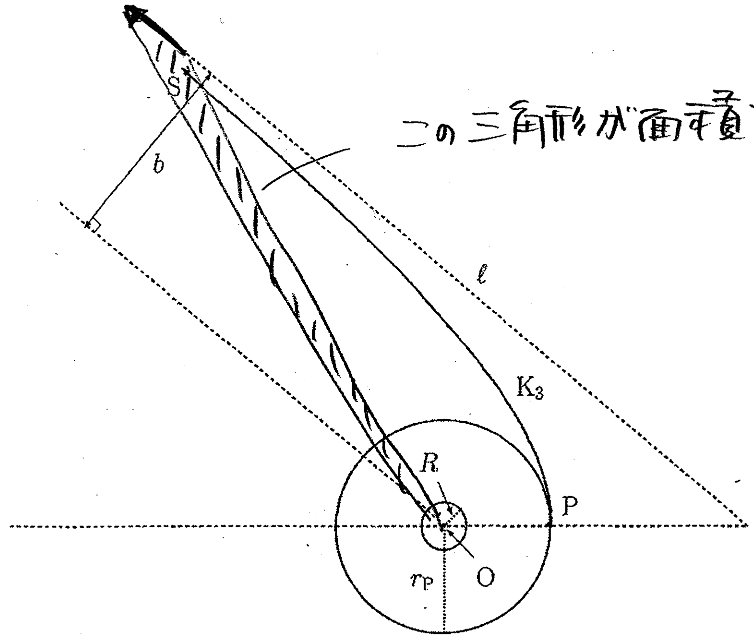
(つづき) 消したいのは，v_Qなので，
(面) $v_Q=\frac{r_P}{r_Q}v_P$ を(カ)へ代入する。

$v_P^2-\frac{2GM}{r_P}=\left(\frac{r_P}{r_Q}v_P\right)^2-\frac{2GM}{r_Q}$

(r_Qの2次方程式)
(しかも，$r_Q=r_P$は絶対に解の1つのはず!)

$(r_Q^2-r_P^2)v_P^2-\frac{r_Q\cdot 2GM}{r_P}(r_Q-r_P)=0$

$(r_Q-r_P)\left\{(r_Q+r_P)v_P^2-\frac{r_Q\cdot 2GM}{r_P}\right\}=0$　　$r_Q\neq r_P$より $(r_Q+r_P)v_P^2-\frac{r_Q\cdot 2GM}{r_P}=0$　　$r_Q=\frac{r_P}{\frac{2GM}{r_Pv_P^2}-1}$



この三角形が面積速度だと分かれば楽勝

図3

問9　$k=\frac{5}{4}$のとき，距離bを，G，M，m，r_Pのうち必要なものを用いて表せ。

(カ) $\frac{1}{2}m(kv_0)^2-G\frac{Mm}{r_P}=\frac{1}{2}mv_\infty^2$

$v_\infty^2=k^2v_0^2-v_0^2$

$v_\infty=\sqrt{k^2-1}\,v_0=\frac{3}{4}v_0$

(面) $\cancel{\frac{1}{2}}r_P\cdot kv_0=\cancel{\frac{1}{2}}v_\infty b$

$b=\frac{kv_0}{v_\infty}r_P=\frac{\frac{5}{4}v_0}{\frac{3}{4}v_0}r_P=\frac{5}{3}r_P$

答 I．問1　$v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$　問2　$T=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$　問3　$-\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r}$　問4　$\frac{r_F}{r}=0.96$　問5　$\frac{v_F}{v}=1.02$

II．問6　$\frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{r_P+r_Q}{2r_P}\right)^{\frac{3}{2}}$　問7　$v_Q=\left(\frac{2GM}{r_Pv_P^2}-1\right)v_P$，$r_Q=\frac{r_P}{\frac{2GM}{r_Pv_P^2}-1}$　問8　$v_0=\sqrt{\frac{2GM}{r_P}}$

問9　$b=\frac{5}{3}r_P$