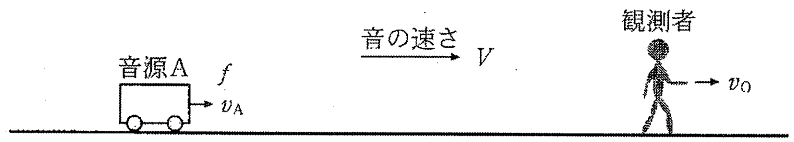
1　2008年　秋田大学　前期日程

次の文章中の空欄(　①　)〜(　⑥　)は数式で埋め，(　⑦　)については(ア)〜(ウ)のうち正しいものを1つ選び，解答欄に記入しなさい。

図のように，振動数f[Hz]の音波を発している音源Aが速度v_A [m/s]で左から観測者に向かって移動している。観測者も速度v_O [m/s]で音源と同じように左から右に移動している。このときに観測者が聞く音波の振動数を求めよう。ただし，音の速さをV[m/s]とし，$V > v_A$，$V > v_O$とする。

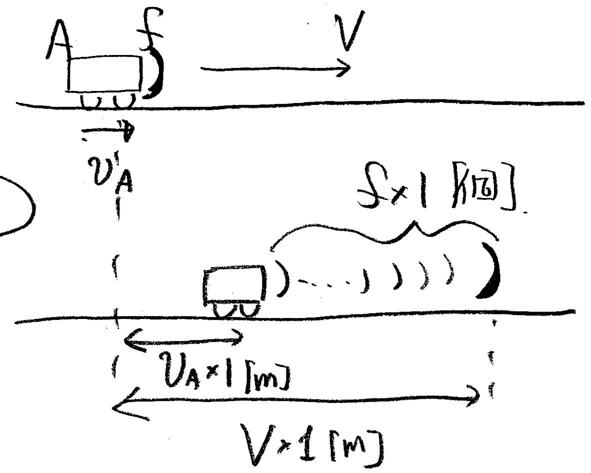


この問題を以下のように場合分けして解くことにしよう。

まず，音源Aが速度v_Aで移動し，観測者が静止している($v_O=0$)場合を考えよう。1波長の音波を1個と数えることにすると，音源Aは1秒間に$f\times1$個の音波を出し，$v_A\times1$[m]進む。同じ1秒間に音波は音源Aと同じ起点から$V\times1$[m]進む。したがって，(　①　)×1[m]の間に$f\times1$個の音波が含まれているので，観測者が聞く音波の波長は(　②　)[m]であり，この波長と音の速さから観測者が聞く音波の振動数f_1は(　③　)[Hz]である。

次に，音源Aが静止し($v_A=0$)，観測者が速度v_Oで移動している場合を考えよう。1秒間に観測者は$v_O\times1$[m]進み，音波は観測者と同じ起点から$V\times1$[m]進む。したがって，観測者は1秒間に(　④　)×1[m]の間に含まれる波長の数の音波を聞くことになるので，その振動数f_2は(　⑤　)[Hz]である。

以上を考慮して，音源Aが速度v_A，観測者が速度v_Oで移動している場合を考えよう。この場合は，まず音源Aが静止し，観測者が速度v_Oで移動しているときに観測者が聞く振動数f_2[Hz]の音波を発する音源があると考え，次にその音源が速度v_Aで移動し，観測者が静止していると考えればよい。したがって，観測者が聞く音波の振動数f_3はf_2とf_1から求められ，V，v_A，v_O，fを用いて表すと，(　⑥　)[Hz]である。そして$v_A > v_O$のとき，振動数f_3は(⑦　(ア)　fより小さい，(イ)　fより大きい，(ウ)　fと等しい)。

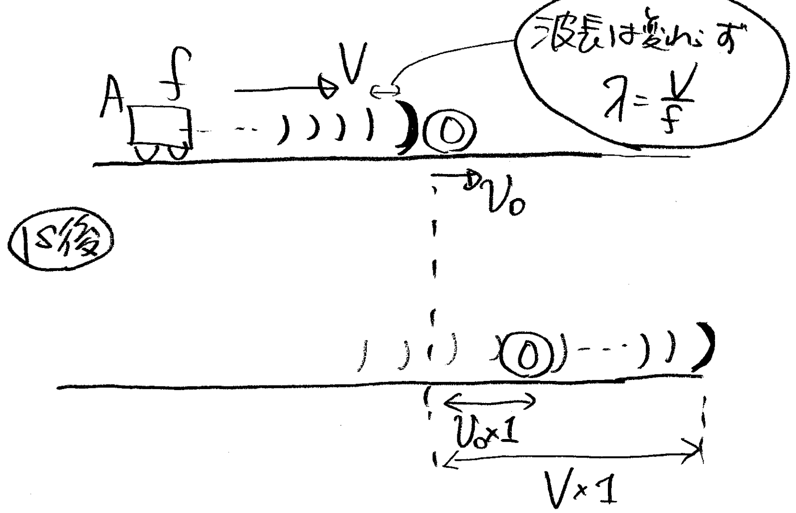


左図より。

① $V-v_A$

② $\lambda'=\dfrac{(V-v_A)\times1}{f\times1}=\dfrac{V-v_A}{f}$

③ $f_1=\dfrac{V}{\lambda'}=\dfrac{V}{V-v_A}f$



左図より

④ $V-v_O$

⑤ $f_2=\dfrac{V-v_O}{\lambda}=\dfrac{V-v_O}{V}f$

⑥ 観測者に $\lambda'=\dfrac{V-v_A}{f}$ の波長の音波が届き，

$V-v_O$の間でそれを聞くので，

$$f_3=\frac{V-v_O}{\lambda'}=\frac{V-v_O}{V-v_A}f$$

⑦ (分子)>(分母)となるので，(イ)

答　①$V-v_A$　②$\dfrac{V-v_A}{f}$　③$\dfrac{V}{V-v_A}f$　④$V-v_O$　⑤$\dfrac{V-v_O}{V}f$　⑥$\dfrac{V-v_O}{V-v_A}f$　⑦(イ)

「ドップラー効果」の公式導出は、
①授業パターン(旧秋田) と ②時刻パターン(旧千葉) の両方をおさえる。

2 2011年 千葉大学 前期日程

大気中に，図1のようにx軸上に振動数f_0の音源Sと観測者Oが存在し，音源Sはx軸正方向に速さvで移動している。観測者Oは$x = x_0\ (x_0 > 0)$の位置で静止している。大気中の音速はVで，音源Sの速さvは音速Vより小さいとする。以下の問いで音源Sは，時刻$t = 0$に$x = 0$の位置にあるとし，時間が経過しても観測者Oの位置にまだ到達していないものとする。

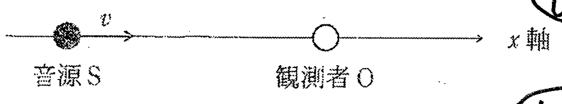
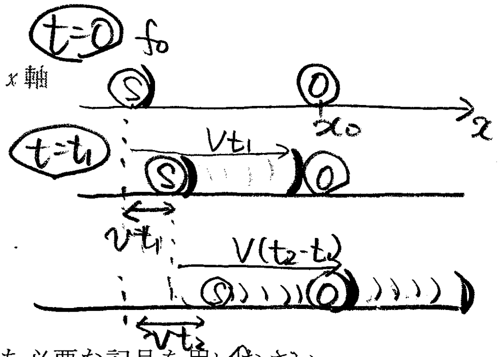


図1



はじめは無風状態で，大気は静止している。

問1 以下の問いに答えなさい。解答は，f_0，v，Vおよびx_0のうち必要な記号を用いなさい。

(1) 時刻$t = 0$に音源Sが発した音が観測者Oに伝わる時刻t_1を求めなさい。

$Vt_1 = x_0$ より $t_1 = \frac{x_0}{V}$

(2) 時刻$t = t_1$における，音源Sと観測者Oの間に存在する音波の波の数n(1波長分を1個とする)を求めなさい。

時間t_1だけ音波を発している

$n = f_0 t_1 = f_0 \frac{x_0}{V}$

(3) 時刻$t = t_1$において音源Sが発した音が，観測者Oに伝わる時刻t_2を求めなさい。

この図を参考にすると。

$V(t_2 - t_1) = x_0 - vt_1$ $t_2 = \frac{x_0}{V}\left(2 - \frac{v}{V}\right)$

(4) 観測者Oが聞く音の振動数f_1を求めなさい。

Oは、時間 $t_2 - t_1 = \frac{x_0}{V}\left(1 - \frac{v}{V}\right)$ で、n個の音波を観測するので

$$f_1 = \frac{n}{t_2 - t_1} = f_0 \frac{\cancel{x_0}}{\cancel{V}} \times \frac{1}{\frac{\cancel{x_0}}{\cancel{V}}\left(1 - \frac{v}{V}\right)} = \frac{V}{V - v} f_0$$

次に，速度Uの風が一様に吹いている場合を考える。ただし，Uは音速Vより小さいとする。音波は大気中を速度Vで伝わる波である。そのために，媒質である大気が移動する場合，音波の伝わる速度は「媒質(大気)中を伝わる速度」と「媒質(大気)の移動する速度」の合成になる。以下の問いに答えなさい。解答は，f_0，v，V，x_0およびUのうち必要な記号を用いなさい。

←この通りにやればOK！

問2 図2のように，x軸の正方向に速さUの風が一様に吹いている場合を考える。

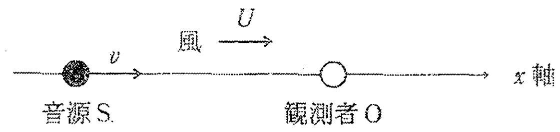


図2

(1) 音源Sから観測者Oに音が伝わる速さを求めなさい。

$V + U$

(2) 時刻$t = 0$に音源Sが発した音が観測者Oに伝わる時刻t_3を求めなさい。

左上図を参考に、($V \to V+U$ とするだけ)

$t_3 = \frac{x_0}{V+U}$

(3) 時刻$t = t_3$において音源Sが発した音が，観測者Oに伝わる時刻t_4を求めなさい。

$t_4 = \frac{x_0}{V+U}\left(2 - \frac{v}{V+U}\right)$

(4) 観測者Oが聞く音の振動数f_2を求めなさい。

$n' = f_0 t_3$
$= f_0 \frac{x_0}{V+U}$

$$f_2 = \frac{n'}{t_4 - t_3}$$
$$= f_0 \frac{\cancel{x_0}}{\cancel{V+U}} \times \frac{1}{\frac{\cancel{x_0}}{\cancel{V+U}}\left(1 - \frac{v}{V+U}\right)}$$
$$= \frac{V+U}{V+U-v} f_0$$

※

答 問1(1) $t_1 = \frac{x_0}{V}$ (2) $n = f_0 \frac{x_0}{V}$ (3) $t_2 = \frac{x_0}{V}\left(\cancel{1}\,2 - \frac{v}{V}\right)$ (4) $f_1 = \frac{V}{V - v} f_0$

問2(1) $V + U$ (2) $t_3 = \frac{x_0}{V + U}$ (3) $t_4 = \frac{x_0}{V + U}\left(\cancel{1}\,2 - \frac{v}{V + U}\right)$ (4) $f_2 = \frac{V + U}{V + U - v} f_0$

3 2012年　大阪大学　後期日程

音源が運動するときのドップラー効果について考えてみよう。

Ⅰ．振動数 f_0 の音源が，図1の直線ℓに沿って，音速 c よりも遅い速さ v で運動している。観測者がいる点Pは直線ℓ上の点Aから L の距離にあり，また，点Pは点Aから見て音源の速度の方向とθの角度をなす方向にある。このとき，点Pにいる観測者が聞く音の振動数fに対するドップラー効果の式を導いてみよう。求める式は，$\theta=0$ の場合には，よく知られた公式 $f=\dfrac{c}{c-v}f_0$ に帰着するはずである。

$\Delta x = vT = \dfrac{v}{f_0}$

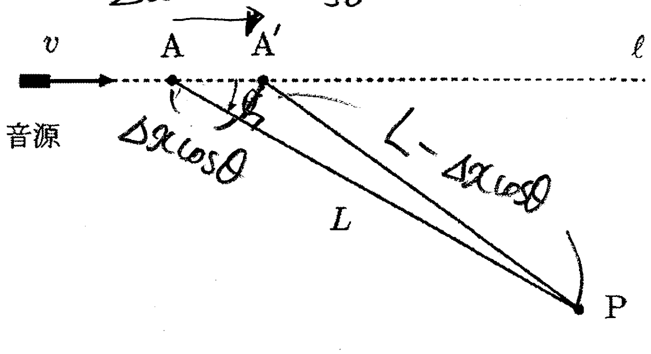


図1

問1　ある瞬間に点Aを通過した音源は，音の振動の1周期後に点A′を通過した。A，A′間の距離Δxを，f_0，c，v，L のうち必要なものを用いて表せ。

$\Delta x = vT = \dfrac{v}{f_0}$

問2　音源が点Aを通過する瞬間に出す音波と，点A′を通過する瞬間に出す音波が，点Pに到達する時間の差をΔtとする。このΔtを，f_0，c，v，L，θのうちの必要なものを用いて表せ。ただし，距離 L が，A，A′間の距離Δxに比べて十分大きいときには，A，P間の距離とA′，P間の距離の差は，近似的に，$\Delta x\cos\theta$で与えられることを用いてよい。

問3　問2で求めた時間差Δtに注意して，点Pの観測者が聞く音の振動数fを，f_0，c，v，θを用いて表せ。

問2．$t=0$ で A で出した音が届く時刻　$t_1=\dfrac{L}{c}$

$t=T\left(=\dfrac{1}{f_0}\right)$ で A′で出した音が届く時刻　$t_2=\dfrac{1}{f_0}+\dfrac{L-\Delta x\cos\theta}{c}$

$\therefore \Delta t = t_2-t_1=\dfrac{1}{f_0}-\dfrac{\Delta x\cos\theta}{c}=\dfrac{1}{f_0}-\dfrac{v\cos\theta}{f_0 c}=\dfrac{c-v\cos\theta}{cf_0}$

問3．Δt の間に1コの音波を観測するので　$f=\dfrac{1}{\Delta t}=\dfrac{c}{c-v\cos\theta}f_0$（知っている結果と一致）

Ⅱ．次に，半径 R の円形のコースを，振動数 f_0 の音を出しながら，自動車が反時計回りに速さ v で等速円運動をしている(図2参照)。自動車がコースを1周する時間は $T_0=\dfrac{2\pi R}{v}$ で与えられる。自動車が出す音を，観測者が，円形コースの中心から $L(>R)$だけ離れた点Pで聞き，その振動数 f の時間 t に対する変化を，最初に自動車がB点を通った時刻を $t=0$ としてグラフに描いたところ図3のようになった。この図の中で，t_B，t_C，$t_B{}'$は，自動車がこの順番に，図2のB点，C点，B点を通過した瞬間に発した音を点Pで観測した時刻を表す。

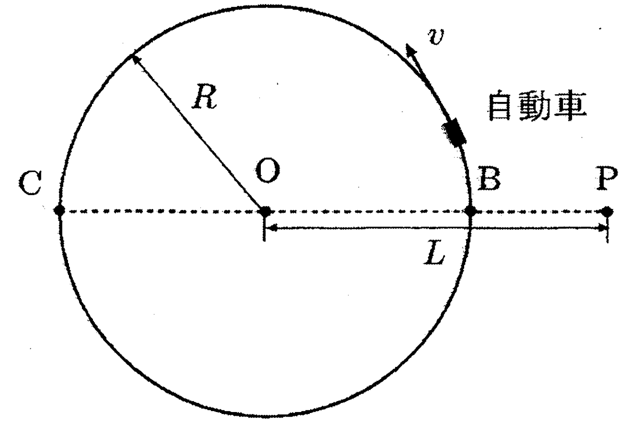
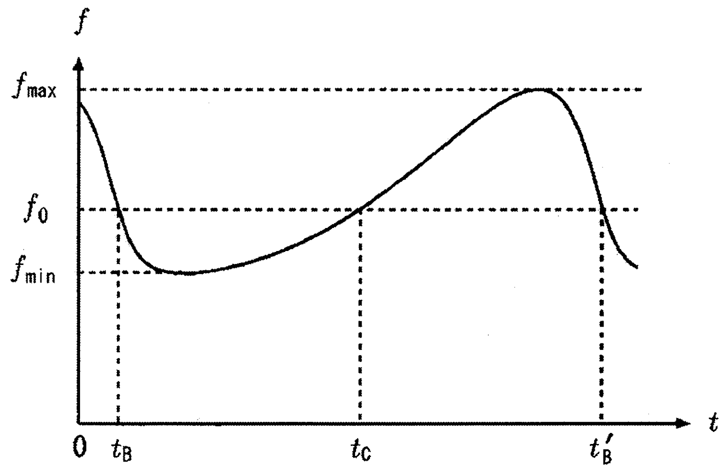


図2



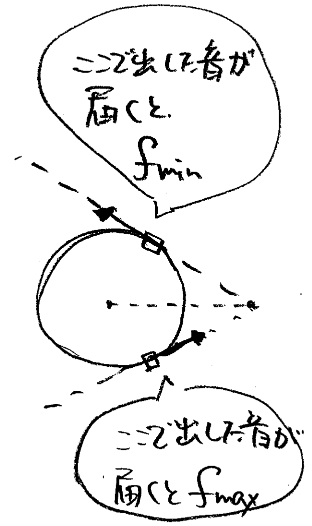


図3

Bで出した音は L−R のキョリを伝わってPまで届くので

問4　t_B，t_C，$t_B{}'$を，T_0，f_0，c，R，L のうち必要なものを用いて表せ。

$t_B=\dfrac{L-R}{c}$　同様に　$t_C=\dfrac{T_0}{2}+\dfrac{L+R}{c}$，$t_B{}'=T_0+\dfrac{L-R}{c}$

問5　点Pで観測される音の最小振動数 f_{min}，および，最大振動数 f_{max} を，f_0，c，v，R，L のうち必要なものを用いて表せ。

$f_{min}=\dfrac{c}{c+v}f_0$

$f_{max}=\dfrac{c}{c-v}f_0$

Ⅲ．次に，$L=R$ の特別の場合(つまり，観測者が円形コース上にいる場合)を考えてみよう。ただし，観測者による自動車の進路妨害は考えなくてもよい。具体的には，$L=R=1000\,\mathrm{m}$，$c=340\,\mathrm{m/s}$，$f_0=1000\,\mathrm{Hz}$，$T_0=120\,\mathrm{s}$ の場合に，点 P(点 B に一致)の観測者が音の振動数の時間変化を観測したとしよう。自動車が点 P(点 B)を最初に通過する時刻を $t=0$ とする。時刻 t における自動車の位置は，$\phi=\frac{2\pi}{T_0}t$ で与えられる角ϕ(図 4 参照)で指定されることに注意して，以下の問に答えよ。 ωt のことですね

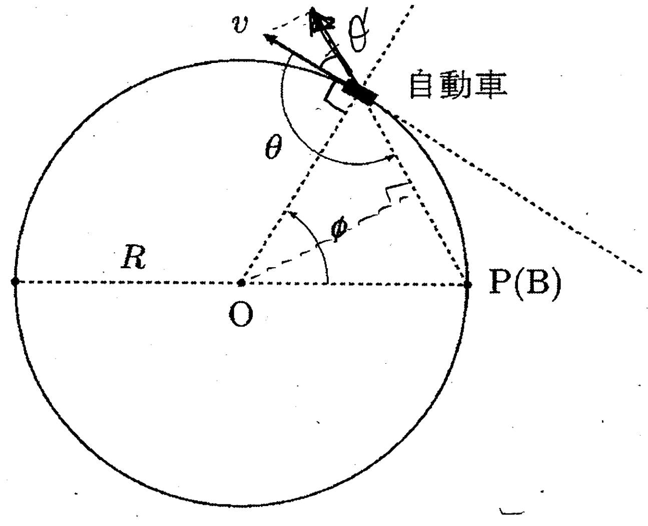
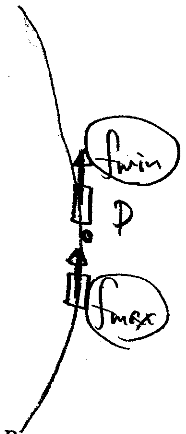


図 4



問6
図のように θ' を設定
$\frac{\pi}{2}+\theta'=\phi+\frac{1}{2}(\pi-\phi)$
$\therefore \theta'=\frac{\phi}{2}$

$f=\frac{c}{c+v\cos\frac{\phi}{2}}f_0$

問 6　時刻 t に自動車が出した音を点 P で観測したときの振動数を f とする。f を，角度ϕと，R，c，v，f_0 のうちの必要なものを用いて表せ。また，その音が点 P に到達する時刻 t' を，R，c，T_0，ϕのうち必要なものを用いて表せ。

自動車ーBのキョリは $2R\sin\frac{\phi}{2}$ なので、 $t'=\frac{\phi}{2\pi}T_0+\frac{2R\sin\frac{\phi}{2}}{c}$

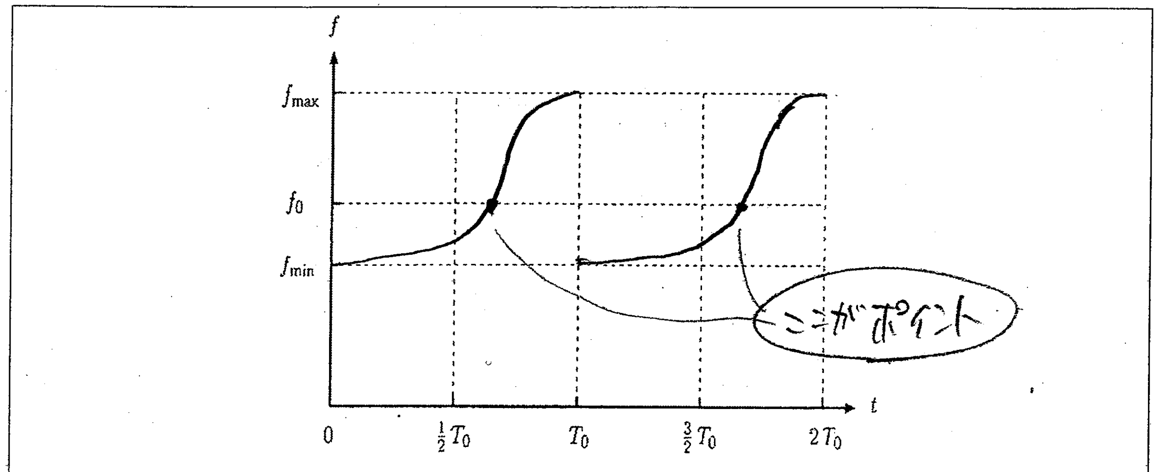
問 7　点 P で観測する音の最小振動数 f_{min} と，最大振動数 f_{max} を，有効数字 2 桁で求めよ。

$-1\leq\cos\frac{\phi}{2}\leq1$ なので、 $f_{min}=\frac{c}{c+v}f_0\fallingdotseq8.7\times10^2\,Hz$, $f_{max}=\frac{c}{c-v}f_0\fallingdotseq1.2\times10^3\,Hz$

問 8　観測する音の振動数が，$t>0$ で初めて f_0 になる時刻 t を，有効数字 2 桁で求めよ。

Cで出した音が届けばよいので、 $t=\frac{T_0}{2}+\frac{2R}{c}\fallingdotseq66s$

問 9　点 P(点 B)で観測する音の振動数の時間変化を表すグラフの概略を，$0<t<2T_0$ の区間にわたって，解答欄の所定の箇所に描け。



問 9 の解答欄

fmin, fmaxは出した瞬間に聞こえる(時間差なし)
しかも、一瞬で fmax → fmin に切り替わる
f0 (Cで出した音)は届くまで少し時間差あり

答　Ⅰ．問 1　$\Delta x=\frac{v}{f_0}$　問 2　$\Delta t=\frac{1}{f_0}\cdot\frac{c-v\cos\theta}{c}$　問 3　$f=\frac{c}{c-v\cos\theta}f_0$

Ⅱ．問 4　$t_{\mathrm{B}}=\frac{L-R}{c}$，$t_{\mathrm{C}}=\frac{T_0}{2}+\frac{L+R}{c}$，$t_{\mathrm{B}}'=T_0+\frac{L-R}{c}$　問 5　$f_{\mathrm{min}}=\frac{c}{c+v}f_0$，$f_{\mathrm{max}}=\frac{c}{c-v}f_0$

Ⅲ．問 6 $f=\frac{c}{c+v\cos\frac{\phi}{2}}\cdot f_0$，$t'=\frac{\phi}{2\pi}T_0+\frac{2R\sin\frac{\phi}{2}}{c}$

問 7 $f_{\mathrm{min}}=8.7\times10^2\,[\mathrm{Hz}]$，$f_{\mathrm{max}}=1.2\times10^3\,[\mathrm{Hz}]$

問 8　$t=66\,[\mathrm{s}]$　問 9　次図