単振動徹底演習　第1回

1　なめらかな水平面上に質量 m の小球とばね定数 k_1 のばね1およびばね定数 k_2 のばね2がある。ばねの質量，空気の抵抗は無視できるものとして以下の問に答えよ。ただし，小球の速度，加速度は右向きを正とする。

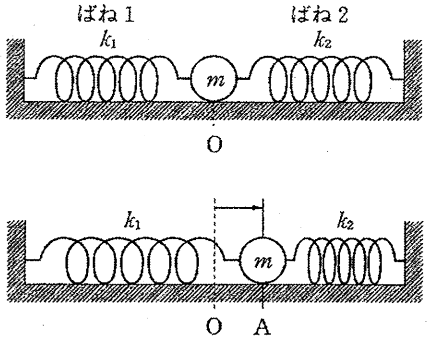
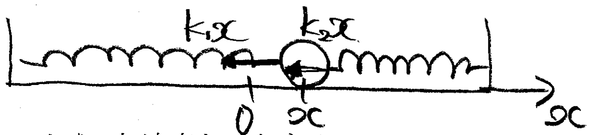


図1

(a) 図1のように，小球の両側にばねをつけ，どちらのばねも自然の長さとなるようにばねの他端を固定する。この状態における小球の位置を点Oとする。小球を点Oから点Aに移動し，静止させてから静かに放すと，小球は単振動を行った。

（1）振動中の小球の点Oから変位を，右向きを正として x で表すとき，小球に働く水平方向の力 F を，符号を含めて答えよ。

右図より　$F=-k_1x-k_2x$
$=-(k_1+k_2)x$



（2）（1）のときの小球の運動方程式を示せ。ただし，小球の加速度を a とする。

$$ma=-(k_1+k_2)x$$

（3）小球の加速度 a を角振動数 ω と x を用いて表せ。

$$a=-\omega^2x$$

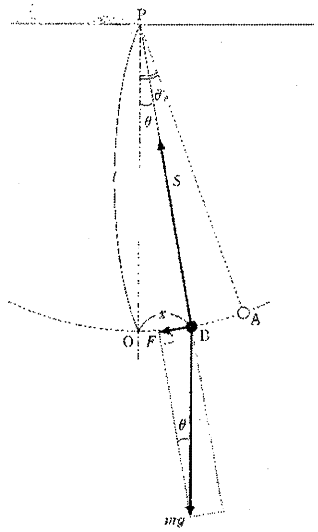
（4）ω を，k_1，k_2，m を用いて表せ。

(2)(3)より　$m(-\omega^2x)=-(k_1+k_2)x$　$\therefore\ \omega=\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{m}}$

（5）小球の単振動の周期 T を求めよ。

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$$

2　図のように長さ ℓ の軽い糸の上端を点Pで固定し，下端に質量 m のおもりをつける。鉛直面内で点Oを中心として，図の点Aから十分小さい振幅で左右に振動させる。重力加速度の大きさを g とする。振動中の点Bで，おもりを最下点Oへ引き戻す働きをする力 F は重力の円弧に対する接線方向の成分である。点Bにおいて，円弧に沿った点Oからの変位を x（x は右向きを正），糸と鉛直線のなす角を θ（反時計回りを正）とすると，F は g，m，θ を用いて $F=$（　①　）となる。θ が十分に小さいとき，$\sin\theta \fallingdotseq \theta=$（　②　）と近似できるので，$F$ は g，ℓ，m，x を用いて $F=$（　③　）のように近似できる。



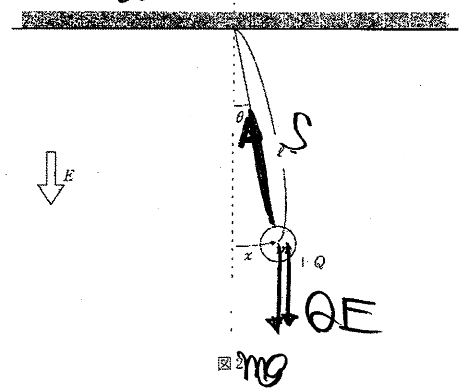
（1）文章中の①～③に適切な式を埋めよ。

① $-mg\sin\theta$　② $\dfrac{x}{\ell}$　③ $-mg\dfrac{x}{\ell}$

（2）この単振り子の角振動数 ω と周期 T を求めなさい。（周期の式は公式として覚えておくとよい）

運動方程式
$m(-\omega^2x)=-\dfrac{mg}{\ell}x$ より　$\omega=\sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$，$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$

次に，図2に示すように鉛直下向きに大きさ E の電場をかけ，おもりに電荷 Q を与える。



（3）おもりが電場から受ける力の大きさと向きを答えなさい。

鉛直下向き、QE.

（4）糸と鉛直線のなす角を θ とし，このときおもりが受ける接線方向の力 F' を，m，θ，g，E，Q を用いて表せ。

$$F'=-(mg+QE)\sin\theta$$

（5）F' を，m，ℓ，x，g，E，Q で表せ。角度 θ は小さい。

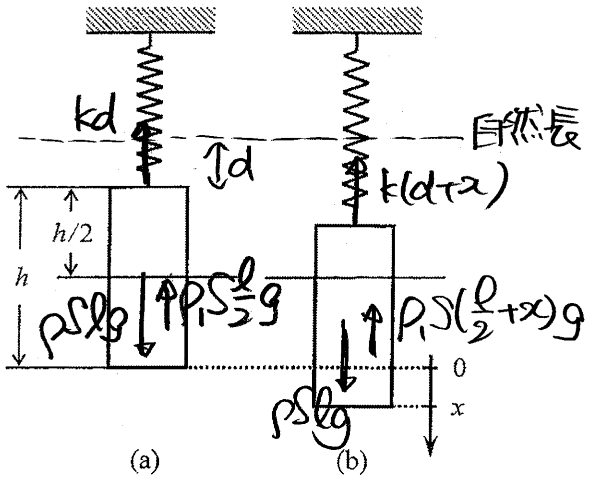
$\sin\theta \fallingdotseq \tan\theta=\dfrac{x}{\ell}$ より　$F'=-\dfrac{mg+QE}{\ell}x$

（6）この単振り子の角振動数 ω' と周期 T' を求めなさい。（もちろん覚える式ではない）

運動方程式
$m(-\omega^2x)=-\dfrac{mg+QE}{\ell}x$ より　$\omega'=\sqrt{\dfrac{mg+QE}{m\ell}}$

$T'=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m\ell}{mg+QE}}$

3 底面積 S，高さ h，密度ρの円柱状の物体を，ばね定数 k のばねの下端に取り付け，密度ρ_1の液体（ただし，$\rho_1<\rho$）に浸したところ，図(a)のように，物体のちょうど半分が液体中に入ったところでつり合い，物体が静止した。次に，物体を静止している状態から$\frac{h}{4}$だけ押し下げて静かに放すと，物体は上下に周期的に振動し始めた。以下の問いに答えよ。ただし，物体の運動による液面の位置の変化やゆれ，液体の抵抗や表面張力は無視し，重力加速度の大きさを g とする。



(a) (b)

（1） 物体が静止しているときの，ばねの自然長からののび d を求めよ。

力のつりあい

$\rho S\ell g-\rho_1 S\frac{\ell}{2}g-kd=0$ より $d=\frac{(2\rho-\rho_1)S\ell g}{2k}$

（2） 物体が静止しているときの物体の底面の位置を原点，鉛直下向きを正とする座標軸をとる。物体が振動している場合，物体の底面の位置が x のとき(図(b)参照)に，

① 物体にはたらく浮力を，符号を含めて答えよ。 $-\rho_1 S(\frac{\ell}{2}+x)g$

② 物体にはたらく弾性力を，符号を含めて答えよ（答は d を用いてよい）。 $-k(d+x)$

③ 物体に働く鉛直方向の合力 F を符号も含めて求めよ。

$F=\rho S\ell g-\rho_1 S(\frac{\ell}{2}+x)g-k(d+x)$

$=-\rho_1 Sxg-kx=-(\rho_1 Sg+k)x$

（3） 物体の振動の周期 T を求めよ。

運動方程式

$\rho S\ell(-\omega^2 x)=-(\rho_1 Sg+k)x$ より $\omega=\sqrt{\frac{\rho_1 Sg+k}{\rho S\ell}}$，$T=2\pi\sqrt{\frac{\rho S\ell}{\rho_1 Sg+k}}$

（4） もし，鉛直上向きを正として x 軸を設定した場合，（2）③の F はどうなるか、答えよ。

① 浮力 $\rho_1 S(\frac{\ell}{2}-x)g$

② 弾性力 $k(d-x)$

③ $F=\rho_1 S(\frac{\ell}{2}-x)g+k(d-x)-\rho S\ell g$

$=-(\rho_1 Sg+k)x$

4 図1－1のように，半径が R で一様な密度ρの球である惑星に，中心Oを通るまっすぐな細い穴がある。この穴に沿って中心Oを原点とする X 軸をとり，X 軸上を小球が運動する。穴の体積は無視できるほど小さい。また，小球の中心位置を x で表し，質量は m で惑星の質量に比べ十分小さく，穴と小球の間の摩擦は無視できる。小球を $x=R$ で静かに放すと，小球は単振動を行った。万有引力定数を G として，以下の問いに答えよ。

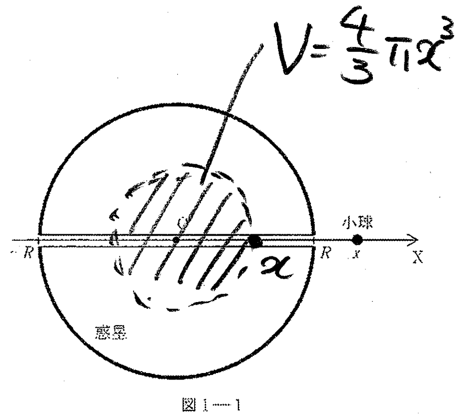


図1－1

（1） 小球が位置 x で惑星から受ける力は，半径$|x|$の球に含まれる惑星の質量が中心Oに集まったと仮定した場合に，小球が受ける万有引力に等しい。惑星が位置 x（$-R\leqq x\leqq R$）にいるとき，

① 半径$|x|$の球に含まれる惑星の質量はいくらか（ヒント：体積は？）

② この小球が受ける力 F を，符号まで含めて答えよ。

① $M=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi x^3=\frac{4}{3}\pi\rho x^3$

② $F=-G\frac{Mm}{x^2}=-\frac{4}{3}\pi G\rho mx$

（2） 小球の単振動の角振動数ωと周期 T を求めなさい。

運動方程式

$m(-\omega^2 x)=-\frac{4}{3}\pi G\rho mx$ より

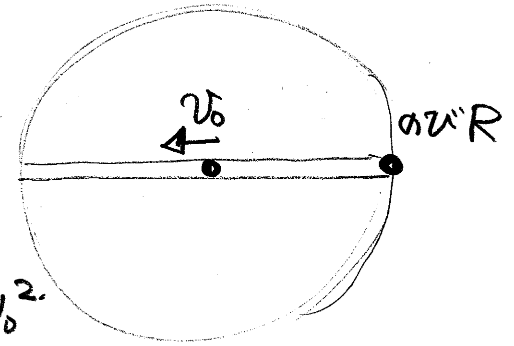
$\omega=\sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho}$ $T=\frac{2\pi}{\omega}=\sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$

（3） この小球が受ける力 F がばねの弾性力を同じ形としていることから，小球の単振動に対しては，水平ばね振り子と同様のエネルギー保存則を立ててよい。小球の中心Oでの速さを求めよ。

$F=-\boxed{\frac{4}{3}\pi G\rho m}x$

↓

ばね定数 k のように扱える

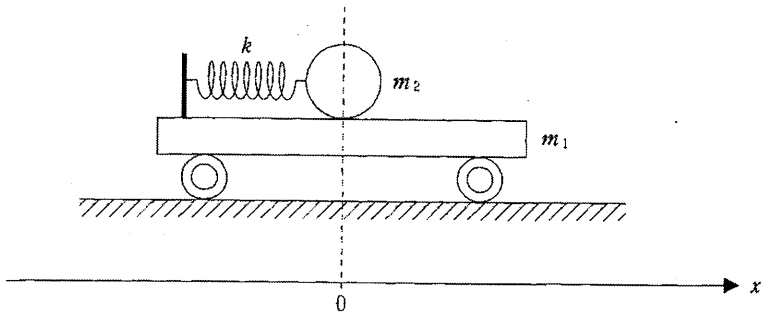


単振動のエネルギー保存則

$\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{4}{3}\pi G\rho m}_{k}\cdot R^2=\frac{1}{2}mv_0^2$

$v_0=\sqrt{\frac{4\pi G\rho R^2}{3}}$

図Ⅱに示すように水平な床の上におかれた質量m_1 [kg]の台車の上に，質量m_2 [kg]の小球がばね定数 k[N/m]のばねによってつながれており，ばねは自然の長さであった。床に平行で右向きにx軸をとると，このとき台車と小球の重心はいずれも$x=0$の位置にあった。台車と小球は水平方向にのみ運動するものとし，速度，加速度は右向きを正とする。なお，台車と床の摩擦，台車と小球の摩擦および空気抵抗は無視する。



図Ⅱ

問 1　図Ⅱにおいて台車を床に固定した。その状態から小球を右向きに d[m]だけ移動し，静かにはなしたところ，小球は単振動をはじめた。このとき，次の(1)から(3)までの問いに答えよ。

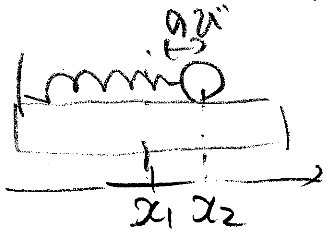
(1)　小球をはなした直後に，小球がばねから受ける力の大きさ F[N]を求めよ。

$F = kd$ [N]

(2)　小球の速さの最大値 $|v|$ [m/s]を求めよ。

$\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}m_2|v|^2$

$|v| = d\sqrt{\frac{k}{m_2}}$ [m/s]



(3)　小球の単振動の周期 T[s]を求めよ。

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}}$ [s]

↑
公式として使ってOK.

$a_2 = -\frac{(m_1+m_2)k}{m_1m_2}\left(x_2 - \frac{m_2d}{m_1+m_2}\right)$ [m/s^2]

問 2　図Ⅱの状態から，台車を動かないように押さえたまま，小球を右向きに d[m]だけ移動した後，台車と小球を静かに同時にはなしたところ，台車と小球はそれぞれ運動をはじめた。このとき，次の(1)から(4)までの問いに答えよ。

(1)　ばねが自然の長さに戻った瞬間の台車の速度をv_1 [m/s]，小球の速度をv_2 [m/s]とする。このときの台車と小球からなる物体系の運動量(それぞれの運動量の和) I [kg·m/s]を求めよ。

$I = m_1v_1 + m_2v_2$ [kg·m/s]

(2)　v_1 [m/s]とv_2 [m/s]の大きさを求めよ。

運動量保存.

$0 = m_1v_1 + m_2v_2$

力学的エネルギー保存則

$\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$

これらを解いて,

$|v_1| = d\sqrt{\frac{m_2k}{m_1(m_1+m_2)}}$ [m/s]

$|v_2| = d\sqrt{\frac{m_1k}{m_2(m_1+m_2)}}$ [m/s]

(3)　台車の重心位置をx_1 [m]，小球の重心位置をx_2 [m]とするとき，台車と小球からなる物体系の重心位置x_G [m]を求めよ。

重心の公式より $x_G = \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$ [m]

(4)　小球の加速度a_2 [m/s^2]をm_1 [kg]，m_2 [kg]，d[m]，k[N/m]およびx_2 [m]を用いて表せ。

重心は手をはなした瞬間と変わらないので,

$x_G = \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1\cdot 0 + m_2d}{m_1+m_2}$　$\therefore m_1x_1+m_2x_2 = m_2d$

小球の運動方程式は

$m_2a_2 = -k(x_2 - x_1)$　代入して x_1を消去.

$= -\frac{k}{m_1}\{m_1x_2 - (m_2d - m_2x_2)\}$

問 1　(1) $F = kd$ [N]　(2) $|v| = d\sqrt{\frac{k}{m_2}}$ [m/s]　(3) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}}$ [s]

問 2　(1) $I = m_1v_1 + m_2v_2$ [kg·m/s]　(2) $|v_1| = d\sqrt{\frac{m_2k}{m_1(m_1+m_2)}}$ [m/s]，　$|v_2| = d\sqrt{\frac{m_1k}{m_2(m_1+m_2)}}$ [m/s]

(3) $x_G = \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$ [m]　(4) $a_2 = -\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}k\left(x_2 - \frac{m_2d}{m_1+m_2}\right)$ [m/s^2]