単振動徹底演習 第2回

1 図1のように，2つの物体が摩擦のない滑車を使って，ばね定数kのばねに接続されている。質量m_1の物体1はなめらかで水平な台上にあり，質量m_2の物体2は糸につながれ，鉛直につり下げられている。水平右向きにx軸をとり，ばねが自然長のときの物体1の左端をx軸の原点とする。また，重力加速度の大きさをgとする。ただし，滑車とばね，および糸の質量は無視できるとする。

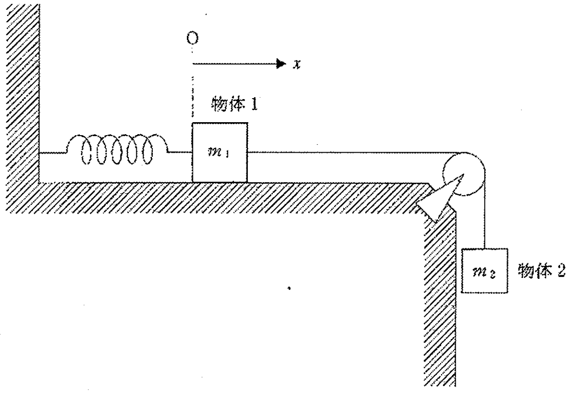
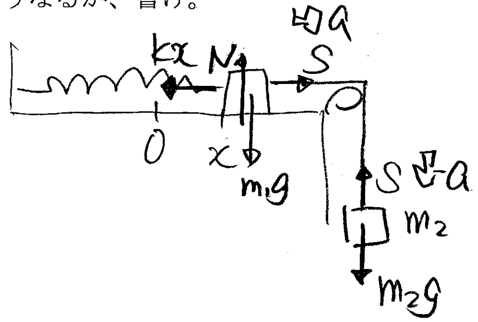


図1

ばねが自然長の状態から，物体1を静かに離したところ，ばねが伸び，物体1は水平右向きに，物体2は鉛直下向きに動き出した。

（1） 物体1の左端がxの位置にあるとき，糸の張力の大きさをS，物体1の加速度を右向きを正にとってaとすると，物体1の運動方程式はどうなるか、書け。

$m_1 a = S - kx$



（2） （1）のときの物体2の運動方程式を書け。

$m_2 a = m_2 g - S$

（3） 物体1、2加速度aを，Sを用いずに表せ。

辺々足して

$(m_1+m_2)a = m_2 g - kx$　　$\therefore a = \frac{m_2 g - kx}{m_1+m_2}$

（4） 物体1の単振動の振動中心，振幅，周期を求めよ。

$a = -\frac{k}{m_1+m_2}\left(x - \frac{m_2 g}{k}\right)$　　$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$

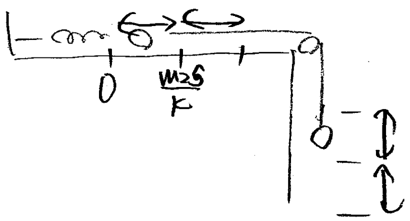
より中心 $x = \frac{m_2 g}{k}$，振幅 $\frac{m_2 g}{k}$，周期 $2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}$

（5） 物体2が最高点に達したときに糸を切断した。このあとの物体1の運動はどうなるか，記述せよ。

2の最高点 = 1の左端

= $v=0$ かつ ばねののび0.

= 物体1は静止



2 底面の断面積S，質量mの一様な直方体がある。図1のように鉛直下向きにx軸をとり，原点は水面の位置とする。この直方体をそっと水面に浮かべたところ，図1のように直方体の底面がx_0の位置で静止した。水の密度をρ，重力加速度の大きさをgとする。次の問いに答えよ。

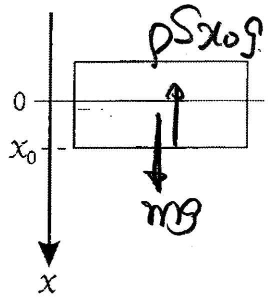


図1

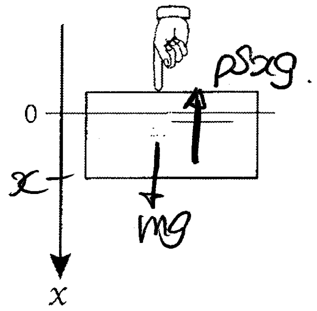


図2

（1） このとき，直方体にかかる浮力の大きさはいくらか。x_0を含む式で表せ。

$\rho S x_0 g$

（2） x_0を求めよ。

力のつりあい

$mg - \rho S x_0 g = 0$　　$\therefore x_0 = \frac{m}{\rho S}$

次に，直方体を静止位置から図2に示すようにわずかに押し下げておき，静かに手を離した。この後の直方体の運動について考える。なお，直方体の運動は鉛直方向に限られるものとし，直方体の運動にともなう水の抵抗と水面の変化は無視する。次の問いに答えよ。

（3） 直方体の底面がxの位置にあるとき，直方体にはたらく合力をρ，g，S，x，x_0で表せ。（※mを用いてはならない）

$F = mg - \rho S x g$

$= \rho S x_0 g - \rho S x g = -\rho S g (x - x_0)$

（4） 直方体の運動は$x = x_0$を中心とする単振動である。その理由を記せ。

$x = x_0$で鉛直方向の力が0となるので，

（5） この単振動の周期Tはいくらか。

運動方程式

$m\{-\omega^2(x-x_0)\} = -\rho S g (x - x_0)$

$\omega = \sqrt{\frac{\rho S g}{m}}$　　$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho S g}}$

3 図１ａに示すように，台車の上に質量の無視できるばね定数 k のばねの一端が固定してあり，他端には厚さが無視できる質量 m の板Ａが取り付けてある。ばねが自然長の状態での板Ａの位置をＰ点とする。台車は水平方向の一直線上を運動し，台車の床は滑らかであるものとする。

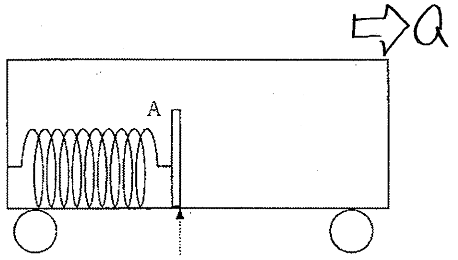


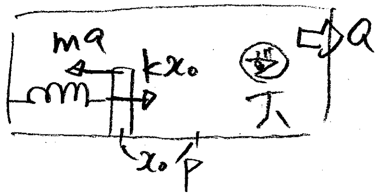
図１ａ

静止していた台車が，図１ａの右方向を正の向きとして，加速度 a（>0）で動き始め，その後も一定の加速度 a で運動を続ける。以下の問いに答えよ。

（１） 板ＡはＰ点からある距離だけ縮んだ点を中心として単振動する。Ｐ点から単振動の中心までの距離を求めよ。

$ma = kx_0$ より　力のつりあい

$x_0 = \frac{ma}{k}$



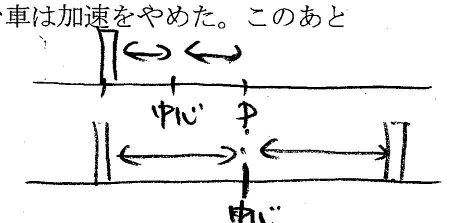
（２）（１）における単振動の周期と振幅を求めよ。

周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$　　振幅 $\frac{ma}{k}$

（３） 板Ａが（１）における単振動の左端に来た瞬間に，台車は加速をやめた。このあとのＡの単振動の右端の位置を求めよ。

右図より

自然長から $\frac{2ma}{k}$ 伸びた位置



（４） 板Ａが（１）における単振動の中心に来た瞬間に台車が加速をやめた。この瞬間の，台車内の観測車から見た板Ａの速さを求めよ。

単振動のエネルギー保存

$\frac{1}{2}k\left(\frac{ma}{k}\right)^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$　$\therefore v_0 = \frac{ma}{k}\sqrt{\frac{k}{m}} = a\sqrt{\frac{m}{k}}$

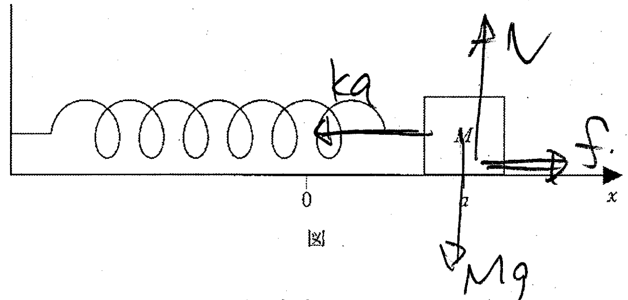
（５）（４）のあと，板Ａの振動の右端の位置を求めよ。

力学的エネルギー保存

$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{ma}{k}\right)^2 = \frac{1}{2}kA^2$

$A = \frac{\sqrt{2}ma}{k}$

4 バネ定数 k のバネの先に質量 M の物体が取り付けられ，水平な机の上に置かれている。バネが自然長のときの物体の中央の位置を原点とし，そこからの変位を x で表すことにする。図の様に，物体を時刻 $t=0$ に $x=a$（a>0）にで静かに放すと，物体は負の方向に動き出した。ただし重力加速度を g，物体と机の間の静止摩擦係数を μ，動摩擦係数を μ' とする。



図

（１） このように物体が動き出すことができるためには，a の値はどのような範囲になければならないか，式で表せ。

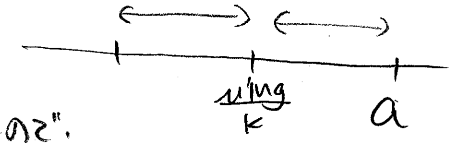
最大マサツカを超える　$ka > \mu Mg$　より　$a > \frac{\mu Mg}{k}$

物体は，物体は負の向きに動き始め，加速し出した。やがて減速し始め，一旦は速度が0になったが，すぐに正の向きに動き始めた。そして再び加速したのち減速し，また速度が0となった。今度は，物体は再び動き出すことはなくそのまま静止し続けた。

（２） 物体が x の負の向きに動いている時に，物体に働く x 方向の力を式で表せ。

$F = \mu' Mg - kx$

$= -k\left(x - \frac{\mu' Mg}{k}\right)$



（３） 物体の速度が一旦０となる地点の x 座標を求めよ。

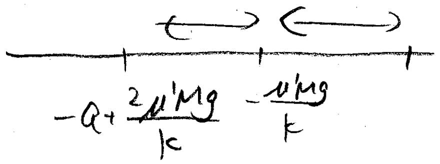
振幅 $a - \frac{\mu' Mg}{k}$ の単振動の一部なので

左端は $\frac{\mu' Mg}{k} - \left(a - \frac{\mu' Mg}{k}\right) = -a + \frac{2\mu' Mg}{k}$

（４） 物体が x の正の向きに動いている時に，物体に働く x 方向の力を式で表せ。

$F = -\mu' Mg - kx$

$= -k\left(x + \frac{\mu' Mg}{k}\right)$



（５） 物体が静止し続ける地点の x 座標を求めよ。

振幅 $-\frac{\mu' Mg}{k} - \left(-a + \frac{2\mu' Mg}{k}\right)$

$= a - \frac{3\mu' Mg}{k}$ の単振動の一部。右端は $-\frac{\mu' Mg}{k} + a - \frac{3\mu' Mg}{k}$

$a - \frac{4\mu' Mg}{k}$

（６） 物体がこの問いの説明文にあるような運動をするためには，a の値はどのような範囲になければならないか，式で表せ。

（3）が 静止範囲外　$-a + \frac{2\mu' Mg}{k} < -\frac{\mu Mg}{k}$ かつ

（5）が 〃 の内　$a - \frac{4\mu' Mg}{k} < \frac{\mu Mg}{k}$

$\therefore \frac{Mg}{k}(\mu + 2\mu') < a < \frac{Mg}{k}(\mu + 4\mu')$

2015年　岐阜大学　後期日程

図1のように質量M[kg]の小球Aと質量m[kg]の小球Bがばね定数k[N/m]，自然長l[m]の一様なばねの両側につながれて，x軸に沿った水平でなめらかなレールの上に置かれている。小球はレールの上のみで運動する。また，小球の大きさ，ばねの質量は考えなくてよい。

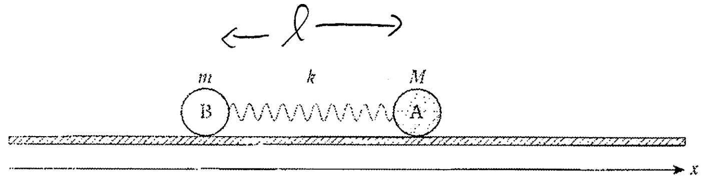


図1

問1　小球A，小球Bとばねを1つの物体Cと考えたとき，小球Aから物体Cの重心Gまでの距離l_A[m]を求めよ。

$$l_A=\frac{m\cdot 0+M\cdot l}{m+M}=\frac{M}{M+m}l\ [\mathrm{m}]$$

ばねの長さがlよりも長くなるように小球Aと小球Bのそれぞれを引っ張った後に静かにはなすと，小球Aと小球Bがぶつかることなく，ばねは伸び縮みを繰り返した。このとき，重心Gは位置を変えることがなかった。そこで，ばねを，図2のように重心Gの右側の部分(小球Aがつながれているばね A)と左側の部分(小球Bがつながれているばね B)に分けて考えることとした。

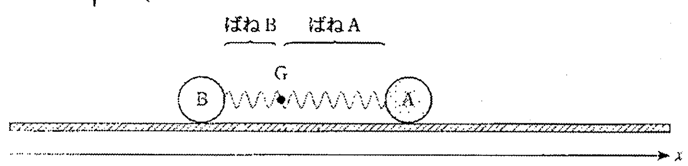


図2

問2　ばねAとばねBのばね定数k_A，k_B[N/m]を求めよ。

ばね全体が x 伸びたとき A は $\frac{m}{M+m}x$ だけ伸びる

$\therefore kx=k_A\frac{m}{M+m}x$　　$k_A=\frac{M+m}{m}k$ [N/m]　　同様に $k_B=\frac{M+m}{M}k$ [N/m]

問3　振動の周期T[s]を，Mとk_Aを用いて表せ。

$$T=2\pi\sqrt{\frac{M}{k_A}}\ [\mathrm{s}]$$

図3のように重心Gがx軸の原点O($x=0$)の位置になるように，物体Cをばねが自然長の状態で置いた。左側から質量mの小球Dを速度v[m/s]で衝突させたところ，小球Dはその場に止まり，物体Cが動き出した。物体Cが運動を始めてから，小球Aと小球Bがぶつかることなく，ばねは伸び縮みを繰り返した。

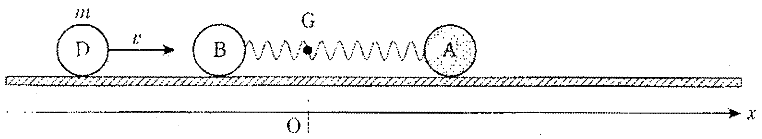


図3

問4　衝突後の物体Cの重心Gの速度を考えよう。小球Aと小球Bがそれぞれ速度v_A[m/s]，v_B[m/s]で運動しているとする。非常に短い時間Δt[s]の間，小球Aと小球Bはそれぞれ$v_A\Delta t$，$v_B\Delta t$だけ移動する。これらと重心の定義から，重心Gの移動距離Δx_G[m]を求めると，

$\Delta x_G=$ ア　　$\frac{Mv_A\Delta t+mv_B\Delta t}{M+m}=\frac{Mv_A+mv_B}{M+m}\Delta t$

$=$ イ Δt　　ア　イ

が分かる。小球Aと小球Bの運動量の和は保存されるので， イ は定数となる。したがって，重心の単位時間あたりの移動距離は常に一定であることが分かる。すなわち，重心Gの運動は速度$v_C=$ イ [m/s]の等速直線運動である。また，この式から衝突後の物体Cの運動量はv_Cを用いて， ウ となることに気づく。衝突前の運動量が保存されることを考えると，小球Dの速度vを用いて，$v_C=$ エ と表される。

ア から エ にあてはまる数式を答えよ。　$(M+m)v_C$

$(M+m)v_C=mv$ より　　$v_C=\frac{m}{M+m}v$

問5　衝突後のばねに蓄えられるエネルギーの最大値E[J]を，M，m，およびvを用いて表せ。

最もちぢんだ(伸びた)時，M.mの速度はv_C

$$E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{m}{M+m}v\right)^2=\frac{Mmv^2}{2(M+m)}$$

問6　衝突後，重心Gから小球Aを見ると，小球AはばねAにより単振動しているように見える。重心Gと小球Aの距離が最大となるときの，ばねAの自然長l_Aからの変位b_A[m]を，M，m，k，およびvを用いて表せ。

Gから見て，Aの初めの速さは $\left|0-\frac{m}{M+m}v\right|=\frac{m}{M+m}v$

$\frac{1}{2}M\left(\frac{m}{M+m}v\right)^2=\frac{1}{2}k_A\cdot b_A^2$　　$\therefore b_A=\frac{m}{M+m}v\sqrt{\frac{M}{k_A}}=\frac{mv}{M+m}\sqrt{\frac{Mm}{(M+m)k}}$ [m]

問7　衝突してからt秒後の小球Aの位置x_t[m]を，l_A，T，v_C，b_A，およびtを用いて表せ。

Gから見て −sin形であるので，Gから見て $l_A-b_A\sin\frac{2\pi}{T}t$

Gは v_Ct なので

$$v_Ct+l_A-b_A\sin\frac{2\pi}{T}t\ [\mathrm{m}]$$

問1 $l_A=\dfrac{m}{M+m}l$[m]　問2 $k_A=\dfrac{M+m}{m}k$ [N/m]，$k_B=\dfrac{M+m}{M}k$ [N/m]　問3 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{M}{k_A}}$ [s]

問4 ア $\dfrac{Mv_A\Delta t+mv_B\Delta t}{M+m}$　イ $\dfrac{Mv_A+mv_B}{M+m}$　ウ $(M+m)v_C$　エ $\dfrac{m}{M+m}v$　問5 $E=\dfrac{Mmv^2}{2(M+m)}$ [J]

問6 $b_A=\dfrac{m}{M+m}\sqrt{\dfrac{Mm}{k(M+m)}}v$ [m]　問7 $x_t=v_Ct+l_A-b_A\sin 2\pi\dfrac{t}{T}$ [m]