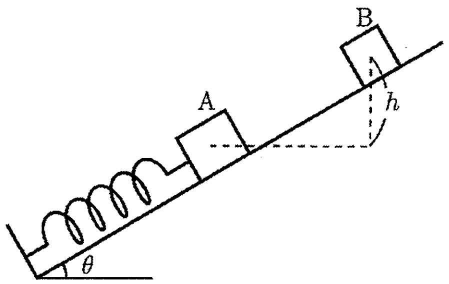
単振動徹底演習　第3回

$\boxed{1}$ 次の問に答えよ。ただし，重力加速度の大きさを g とする。

図のように，水平面から角度θをなすなめらかな斜面に沿って，ばね定数 k のばねが一端を固定されて置かれている。ばねの他端に質量 $2m$ の物体 A が取り付けられ，つりあいの位置で静止している。このときばねは自然の長さから（　①　）だけ縮んでいる。



この物体 A のつりあいの位置を基準とした高さ h の斜面上の位置に質量 m の物体 B を置いて静かに手をはなすと，物体 B は斜面に沿ってすべり，物体 A と衝突した。衝突直前の B の速さは（　②　）であり，物体 B と物体 A が完全非弾性衝突したとすると，衝突直後の物体の速さは（　③　）である。

一体となった物体は，斜面上で単振動をした。この単振動の中心は，ばねが自然の長さから（　④　）だけ縮んだときの物体の位置であり，周期 T は（　⑤　）である。一体となった物体が最高点に達するとき，ばねは自然の長さであった。

（1）①～⑤に当てはまる，適切な式を書きなさい。

① $kd = 2mg\sin\theta$ より　$d = \frac{2mg\sin\theta}{k}$

② $mgh = \frac{1}{2}mv_0^2$　$v_0 = \sqrt{2gh}$

③ $mv_0 = 3mv$　$v = \frac{\sqrt{2gh}}{3}$

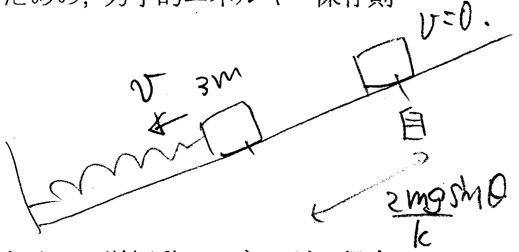
④ $\frac{3mg\sin\theta}{k}$

⑤ $2\pi\sqrt{\frac{3m}{k}}$

（2）＿＿＿線部のことから h を求めたい。h を求めるための，力学的エネルギー保存則の式を立て，それを解きなさい。

$$\frac{1}{2}\cdot 3m\left(\frac{\sqrt{2gh}}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{2mg\sin\theta}{k}\right)^2 = 3m\cdot g\cdot\frac{2mg\sin^2\theta}{k}$$

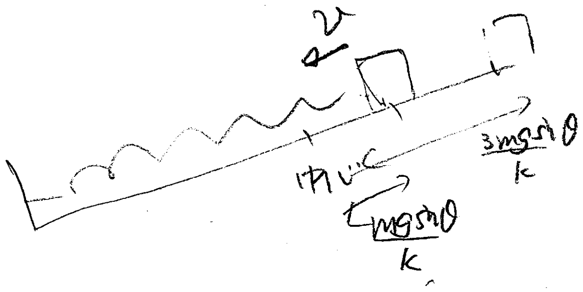
$$h = \frac{12mg\sin^2\theta}{k}$$



（3）＿＿＿線部のことから h を求めたい。h を求めるための，単振動のエネルギー保存則の式を立て，それを解きなさい。

$$\frac{1}{2}\cdot 3m\left(\frac{\sqrt{2gh}}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{mg\sin\theta}{k}\right)^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{3mg\sin\theta}{k}\right)^2$$

$$h = \frac{12mg\sin^2\theta}{k}$$



$\boxed{2}$ 図 1－1 のように，質量 M，底面積 S，高さ H の円柱 A を水槽に入れたところ，沈むことなく浮かんだ。円柱 A の運動について考える。この時，円柱は鉛直方向のみに動くとする。また，水の密度をρ，重力加速度の大きさを g とし，空気の質量や円柱と水との摩擦抵抗，水の運動の影響や水面の揺れについては無視できるものとする。

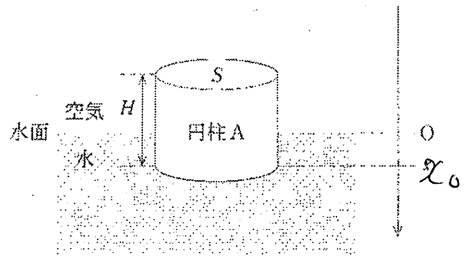


図 1－1

（1）円柱 A がつり合って静止するときの底面の位置 x_0 を求めよ。

$Mg - \rho S x_0 g = 0$ より　$x_0 = \frac{M}{\rho S}$

（2）円柱 A を釣り合いの位置から持ち上げ，静かに手を離した後の運動について考える。ここで，円柱 A は水面下に完全に沈んだり水面から飛び出したりはしないものとする。円柱 A の底面の位置が x のときの加速度を a とし，運動方程式を書け。また，この運動方程式から，円柱 A の単振動の中心と周期を求めよ。

$$Ma = Mg - \rho S x g$$
$$= -\rho S g\left(x - \frac{M}{\rho S}\right)$$

中心は $\frac{M}{\rho S}(=x_0)$

$\omega = \sqrt{\frac{\rho S g}{M}}$ より　$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{\rho S g}}$

図 1－2 のように，静止している円柱 A の上面から高さ L の位置にある小球 B を自由落下させ，円柱 A と完全非弾性衝突させる。小球 B は円柱 A の質量と同じ質量 M を持ち大きさを無視できるものとする。衝突後，円柱は水面下に沈んだり水面から飛び出したりはせずに単振動を行った。

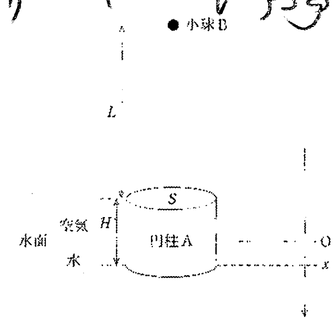


図 1－2

（3）衝突直後の円柱 A の速さを求めよ。

直前の速さ $\sqrt{2gL}$ より

$$M\sqrt{2gL} = 2MV$$

$$V = \frac{1}{2}\sqrt{2gL} = \sqrt{\frac{gL}{2}}$$

（4）衝突後，円柱 A が最大の距離沈んだ時の円柱底面の位置 x を求めよ。

$x \to A$

中心 $2x_0$ の単振動なので，

$$\frac{1}{2}\cdot 2MV^2 + \frac{1}{2}\rho S g\cdot x_0^2 = \frac{1}{2}\rho S g\cdot(A - x_0)^2$$

$$A - x_0 = \sqrt{x_0^2 + \frac{MgL}{\rho S g}}$$

$$A = x_0 + \sqrt{x_0^2 + \frac{M}{\rho S}L}$$

$$= \frac{M}{\rho S} + \sqrt{\left(\frac{M}{\rho S}\right)^2 + \frac{M}{\rho S}L}$$

（5）衝突後，円柱の運動する速さの最大値を求めよ。

$$\frac{1}{2}\cdot 2MV^2 + \frac{1}{2}\rho S g\cdot x_0^2 = \frac{1}{2}\cdot 2M V_0^2$$

$$V_0 = \sqrt{V^2 + \frac{\rho S g}{2M}x_0^2}$$

$$= \sqrt{\frac{gL}{2} + \frac{Mg}{2\rho S}}$$

3 図1のように，ばね定数 k のばねを鉛直に立てて下端を固定する。鉛直下向きに x 軸をとり，ばねの上端の位置を原点Oとする。さらに，図2のように，質量 M の板をばねの上端にとりつけ，板の上に質量 m の物体を静かにのせたところ，座標 x_0 の位置で物体と板は静止した。重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えよ。ただし，物体と板は小さく，ばねの質量は無視できるものとし，鉛直方向以外の運動は考えない。

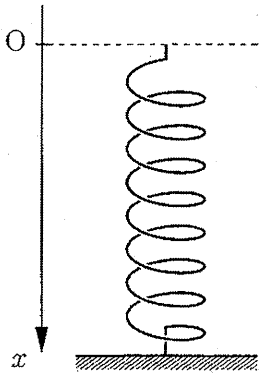


図1

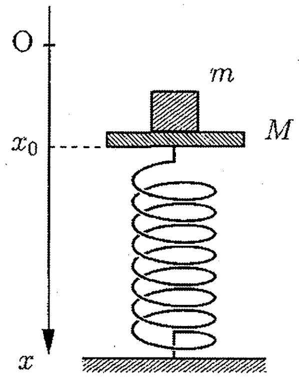


図2

（1） 物体と板が静止した位置 x_0 を求めよ。

$(M+m)g = kx_0$ より　$x_0 = \frac{(M+m)g}{k}$

（2） 板を押し下げて静かにはなしたところ，物体と板は接した状態で単振動をした。

① この単振動の周期を求めよ。

$T = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$

② 物体と板が座標 x の位置にあるとき，物体と板の加速度を a，互いにおよぼす垂直抗力の大きさを N として，物体と板の運動方程式をそれぞれ求めよ。

物体　$ma = mg - N$

板　$Ma = Mg + N - kx$

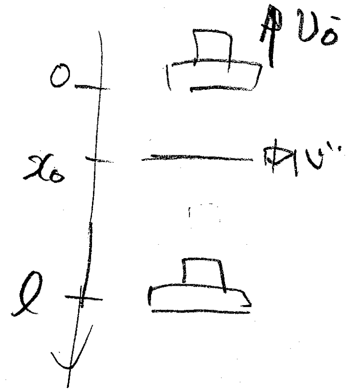
③ 加速度 a と垂直抗力の大きさ N を，M，m，k，x，g を用いて表せ。

辺々加えて　$(M+m)a = (M+m)g - kx$

$a = g - \frac{kx}{M+m}$　　$a = -\frac{k}{M+m}\left(x - \frac{M+m}{k}g\right)$

$N = m(g-a)$
$= \frac{m}{M+m}kx$

（3） 物体と板を静止した状態にもどし，座標 ℓ の位置まで板を押し下げて静かにはなしたところ，運動の途中に物体が板から離れた。



① 物体が板から離れる位置の座標を求めよ。

$N=0$ より　$x = 0$

② 板から離れる直前の物体の速度を，M，m，k，g，ℓ を用いて表せ。

③ 物体が板から離れるために ℓ がみたすべき条件を答えよ。

$\ell > 2x_0 = \frac{2(M+m)g}{k}$

$\frac{1}{2}k(\ell - x_0)^2 = \frac{1}{2}(M+m)v_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2$

$(M+m)v_0^2 = k(\ell - x_0)^2 - kx_0^2$

$= k(\ell^2 - 2\ell x_0)$

$v_0 = \sqrt{\frac{k\ell^2}{M+m} - 2g\ell}$

2012年　大阪大学　後期日程

図1のように，ばね定数がkで質量の無視できるばねの下端が床に固定されている。ばねの上端に質量Mの板を固定し，さらに板の上に質量mの小球をおいたところ，ばねは自然長から$X_0(>0)$だけ縮んでつり合った。鉛直上向きをx軸の正の向きにとり，つり合ったときのばねの上端の位置を原点とする。板の厚さや小球の大きさは無視し，板，小球，ばねはx方向にのみ運動する。重力加速度の大きさをgとし，以下の問に答えよ。

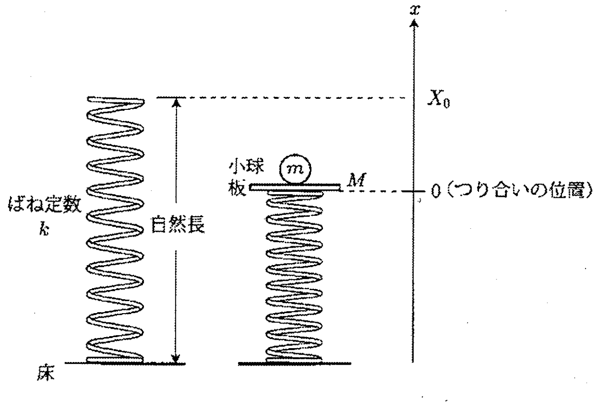


図1

問1　X_0をM，m，k，gを用いて表せ。

$kX_0=(M+m)g$ より　$X_0=\frac{(M+m)g}{k}$

I．ばねをつり合いの位置から$b(>0)$だけ押し縮め，静かに手を離したところ，小球と板が一体となって運動した。

問2　ばねの上端の位置がxのとき，一体となって運動する小球と板の加速度をg，X_0，xを用いて表せ。

$F=k(X_0-x)-(M+m)g$
$=-kx$

$(M+m)a=-kx$ より

$a=-\frac{k}{M+m}x=-\frac{g}{X_0}x$

問3　ばねの上端の位置がxのとき，小球が板から受ける抗力をm，g，X_0，xを用いて表せ。

小球の運動方程式

$ma=N-mg$　より　$N=m(a+g)=mg\left(1-\frac{x}{X_0}\right)$

問4　小球と板が一体となって運動するためにbが満たすべき条件をX_0を用いて表せ。

$N\geqq0$ より　$x\leqq X_0$

従って　$b\leqq X_0$ であればよい。

II．つり合いの位置から，ばねを$B(>0)$だけ押し縮め，静かに手を離したところ，ある位置Pで小球は板から離れた。このときの小球の速さはv_0であった。

↳ $x=X_0$（自然長のこと）

問5　Pの座標をX_0を用いて表せ。

$N=0$ より　$x=X_0$

問6　小球は板から離れたのち，再びPに戻ってきた。この間，板も1周期振動して，小球と同時にPに戻ってきた。v_0をM，k，gを用いて表せ。

板の周期は　$T=2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$

この間に小球は投げ上げで，最初の位置に戻る。

$0=v_0-g\cdot\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$

∴ $v_0=\pi g\sqrt{\frac{M}{k}}$

問7　問6の運動がおこるために，Bのとるべき値をg，k，M，X_0を用いて表せ。また，解答を導くための考え方と用いた計算式を簡潔に記せ。

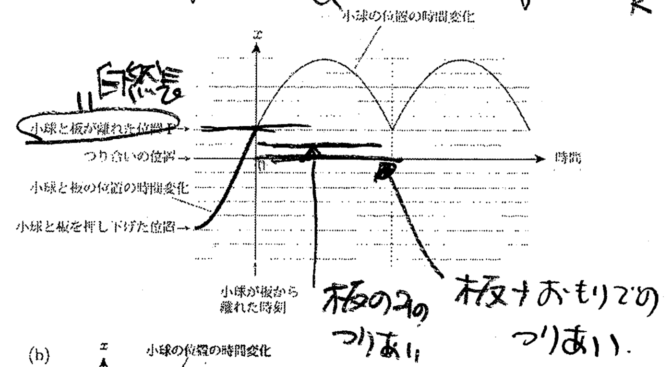
単振動のエネルギー保存

$\frac{1}{2}kB^2=\frac{1}{2}(M+m)v_0^2+\frac{1}{2}kX_0^2$

$B=\sqrt{X_0^2+\frac{M+m}{k}v_0^2}$

$=\sqrt{X_0^2+\frac{X_0}{g}\pi^2g^2\frac{M}{k}}=\sqrt{X_0^2+\frac{\pi^2gMX_0}{k}}$

問8　問6の問題で特に，$m=M$の場合を考えよう。図2は，小球がPで板から離れた後，Pに戻ってきて板と弾性衝突をし，再びPに戻ってくるまでの小球の位置の時間変化を示している。小球が投げ上げられている間の板の振動の中心に注意して，板の位置の時間変化として正しいものを図3(a)～(f)の中から選べ。



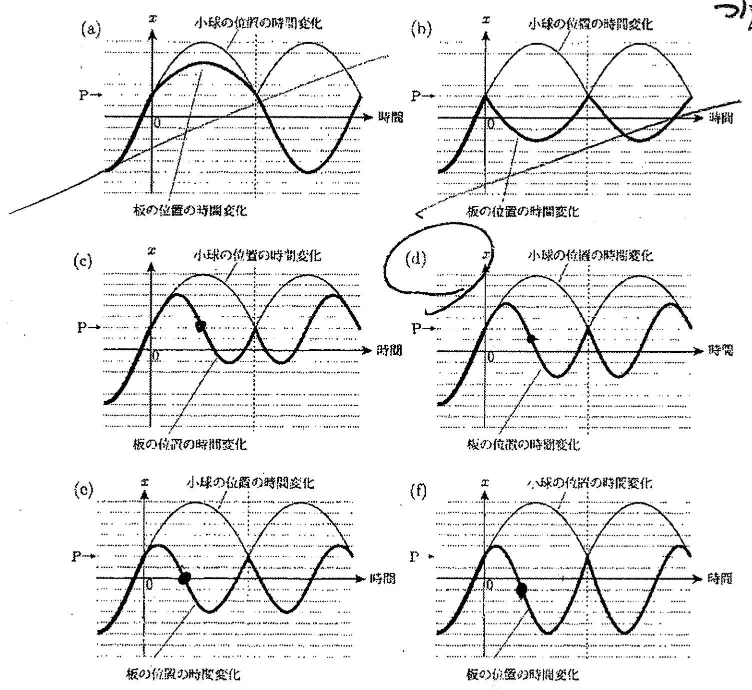


図3

問1　$X_0=\frac{(M+m)g}{k}$　問2　$-\frac{x}{X_0}g$　問3　$mg\left(1-\frac{x}{X_0}\right)$　問4　$b<X_0$　問5　X_0

問6　$v_0=\pi g\sqrt{\frac{M}{k}}$　問7　$B=X_0\sqrt{1+\pi^2\frac{g}{k}\cdot\frac{M}{X_0}}$　問8　(d)