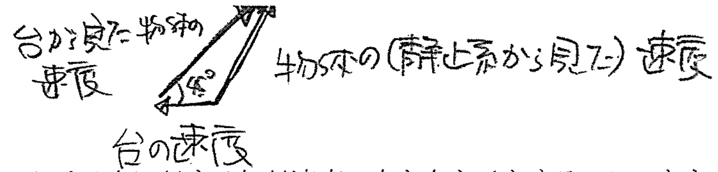
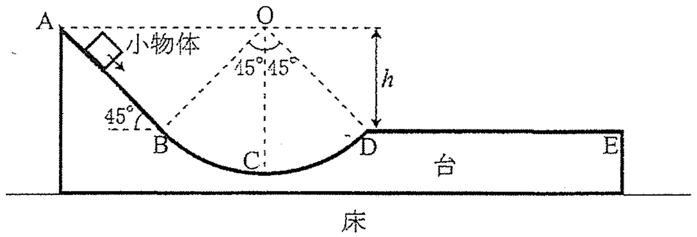


H28 物理学習会(2016.6.14)

2014年　大阪大学　前期日程

【1】

図のように，水平面からの傾き45°の斜面AB，円弧BCD，十分に長い水平面DEからなる台が，水平な床の上におかれている。点Aは円弧の中心Oと同じ高さにあり，OBおよびODは鉛直線OCとそれぞれ左右に45°の角度をなす。水平面DEを基準とする，点Oおよび点Aの高さはhであり，したがって円弧BCDの半径は$\sqrt{2}h$となる。大きさの無視できる質量mの小物体を点Aから静かにはなしたところ，小物体は斜面と円弧に沿って運動し，点Dで飛び出した後，再び台の上に落下した。小物体は紙面内でのみ運動するものとし，摩擦と空気抵抗は無視する。重力加速度の大きさをgとして，以下の問に答えよ。



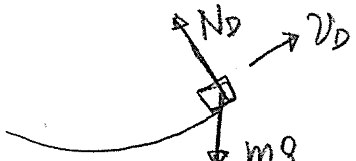
Ⅰ．台が床に固定されている場合について考える。

問1　点Dにおける小物体の速さ(速度の大きさ)を求めよ。

力学的エネルギー保存則

$$mgh = \frac{1}{2}mv_D^2 \qquad \therefore v_D = \sqrt{2gh}$$

問2　点Dにおいて台から飛び出す直前に小物体が受ける垂直抗力の大きさを求めよ。

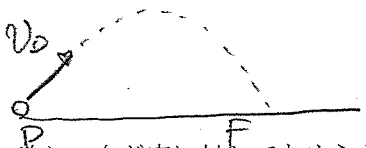


円運動の運動方程式

$$m\frac{v_D^2}{\sqrt{2}h} = N_D - \frac{1}{\sqrt{2}}mg$$

$$\therefore N_D = \frac{3}{\sqrt{2}}mg$$

問3　台から飛び出した小物体が落下する地点を台上の点Fとするとき，DF間の距離を求めよ。



最高点までの時間をtとすると，$0 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_D - gt$

より$t = \frac{v_D}{\sqrt{2}g}$　　$DF = \frac{1}{\sqrt{2}}v_D \times 2t = \frac{v_D^2}{g} = 2h$

Ⅱ．次に，台が床に対してなめらかに動ける場合について考える。台の質量を$3m$とする。はじめ，台は床に対して静止しており，小物体を点Aではなすことによって動き出す。台の運動も紙面内でのみ起こるものとする。

問4　小物体の点Dにおける台に対する相対速度の大きさをv'とする。このときの小物体の速度の鉛直成分(上向きを正とする)をv'を用いて表せ。

$\vec{v}_{台小} = \vec{v}_{小} - \vec{v}_{台}$　これを成分で書くと，

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}v', \frac{1}{\sqrt{2}}v'\right) = (v_x, v_y) - (V, 0) \qquad \therefore v_y = \frac{1}{\sqrt{2}}v'$$

問5　台と小物体についての運動量保存則を考慮することで，小物体の点Dにおける床に対する速度の水平成分と，このときの床に対する台の速度(ともに右向きを正とする)のそれぞれをv'を用いて表せ。

水平方向は，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}v' = v_x - V$$

また，運動量保存則

$$0 = mv_x + 3mV$$

これらを解いて，

$$v_x = \frac{3}{4\sqrt{2}}v', \quad V = -\frac{1}{4\sqrt{2}}v'$$

問6　v'をm，g，hのうち必要なものを用いて表せ。

力学的エネルギー保存則

$$mgh = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}3mV^2$$

問4，問5の結果を代入して，

$$v' = \sqrt{\frac{16gh}{7}}$$

問7　台から飛び出した小物体が落下する地点を台上の点F′とするとき，DF′間の距離をhを用いて表せ。

問3の結果より台上の観測者から見ると

$$DF' = \frac{v'^2}{g} = \frac{16}{7}h$$

問8　小物体が点Dにおいて台から飛び出す直前における，床に対する台の加速度(右向きを正とする)をgを用いて表せ。

静止系から見た，台の運動方程式は

$$3mA = \frac{1}{\sqrt{2}}N$$

台上の観測者から見た，物体の円運動の式は

$$m\frac{v'^2}{\sqrt{2}h} = N + \frac{1}{\sqrt{2}}mA - \frac{1}{\sqrt{2}}mg$$

連立して解くと，$A = \frac{23}{49}g$

答Ⅰ．問1 $\sqrt{2gh}$　問2 $\frac{3}{\sqrt{2}}mg$　問3 DF＝$2h$　Ⅱ．問4 $\frac{v'}{\sqrt{2}}$　問5 水平成分… $\frac{3}{4\sqrt{2}}v'$

速度… $-\frac{1}{4\sqrt{2}}v'$　問6 $v' = 4\sqrt{\frac{gh}{7}}$　問7 DF′＝$\frac{16}{7}h$　問8 $\frac{23}{49}g$

2015年　東京大学　前期日程

【１】

質量 m の小球A，Bが長さ l のひもの両端につながれている。図1のように水平な天井に小球A，Bを l だけ離して固定した。小球Bを固定した点をOとし，重力加速度の大きさを g とする。小球A，Bの大きさ，ひもの質量，および空気抵抗は無視できるものとする。以下の設問に答えよ。

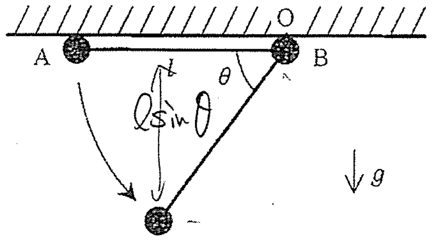


図1

Ⅰ　小球Bを固定したまま小球Aを静かに放した。

(1)　ひもと天井がなす角度を θ とする。小球Aの速さを θ を用いて表せ。ただし，$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ とする。

力学的エネルギー保存則

$0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgl\sin\theta$

$\therefore v = \sqrt{2gl\sin\theta}$

(2)　小球Aが最下点 $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ に達したときのひもの張力の大きさを求めよ。

$\theta = \frac{\pi}{2}$ より $v = \sqrt{2gl}$

運動方程式は

$m\frac{v^2}{l} = T - mg \quad \therefore T = 3mg$

(3)　小球Aが最下点 $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ に達したときの小球Aの加速度の大きさと向きを求めよ。

鉛直上向き，$\frac{v^2}{l} = 2g$

Ⅱ　小球Aがはじめて最下点 $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ に達したときに小球Bを静かに放した。この時刻を $t = 0$ とする。

(1)　2個の小球の重心をGとする。小球Bを放したあとの重心Gの加速度の大きさと向きを求めよ。

物体系には重力以外の外力が働かないので，

大きさ g　向き 鉛直下向き

(2)　時刻 $t = 0$ における，重心Gに対する小球A，Bの相対速度の大きさと向きをそれぞれ求めよ。

$v_G = \frac{m\sqrt{2gl} + m\cdot 0}{m+m} = \sqrt{\frac{1}{2}gl}$

水平右を正として

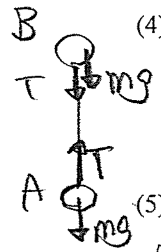
$v_{GA} = v_A - v_G = \sqrt{2gl} - \sqrt{\frac{1}{2}gl} = \sqrt{\frac{1}{2}gl}$

$v_{GB} = 0 - \sqrt{\frac{1}{2}gl} = -\sqrt{\frac{1}{2}gl}$

(3)　時刻 $t = 0$ における，ひもの張力の大きさを求めよ。

ポイントより

$m\frac{v_{GA}^2}{\frac{1}{2}l} = T - mg + mg$　以降は書かない　$\therefore T = mg$

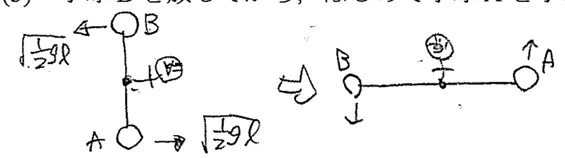


(4)　時刻 $t = 0$ における，小球A，Bの加速度の大きさと向きをそれぞれ求めよ。

(3)より　Aの合力は0 ⇒ Aの加速度は0

Bの合力は鉛直下2mg ⇒ Bの加速度は鉛直下2g

(5)　小球Bを放してから，はじめて小球Aと小球Bの高さが等しくなる時刻を求めよ。



重心から見た等速円運動の $\frac{1}{4}$ 周期を求めればよい

$T = \frac{2\pi\cdot\frac{1}{2}l}{\sqrt{\frac{1}{2}gl}} = \pi\sqrt{\frac{2l}{g}}$　$\therefore \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{2l}{g}}$

(6)　小球Bを放したあとの時刻 t における小球Aの水平位置を求めよ。ただし，点Oを原点とし，右向きを正とする。

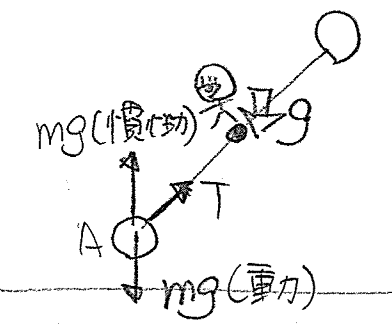
左図の角度θは $\theta = \frac{2\pi}{T}t = \sqrt{\frac{2g}{l}}t$

$\therefore$ 重心から見たAの位置は $\frac{1}{2}l\sin\sqrt{\frac{2g}{l}}t$

$\therefore \sqrt{\frac{1}{2}gl}\cdot t + \frac{1}{2}l\sin\sqrt{\frac{2g}{l}}\cdot t$

ポイント

重心に観測者を置く ⇒ 加速度 g の観測者 ⇒ 物体には慣性力



つまり、物体には観測者向きの張力だけが働いているのと同じである。

⇒ 観測者を中心とする円運動になる。

等速

Ⅰ (1) $\sqrt{2gl\sin\theta}$　(2) $3mg$　(3) $2g$，鉛直上向き　Ⅱ (1) g，鉛直下向き　(2) A $\sqrt{\frac{gl}{2}}$，水平右向き

B $\sqrt{\frac{gl}{2}}$，水平左向き　(3) mg　(4) $2g$，鉛直下向き　(5) $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{2g}}$　(6) $\frac{l}{2}\sin\sqrt{\frac{2g}{l}}t + \sqrt{\frac{gl}{2}}t$

重心はただの水平投射なので水平方向は $\sqrt{\frac{1}{2}gl}$ の等速度