2014年　京都大学　前期日程

【１】

図1のように質量Mの台車の上に大きさの無視できる質量 m の小球が，2 本のばねによって取り付けられている。この2本のばねは，ばね定数kと自然長が等しく，質量は無視できる。はじめ，2本のばねは自然長の状態で，小球は台車の中央にある。台車は摩擦なしに水平面上を動くことができ，台車と小球の間の摩擦も常に無視できるものとする。x軸は右方向を正とし，台車も小球もx軸に平行な方向へのみ動き，ばねは常にx軸に平行であるものとする。

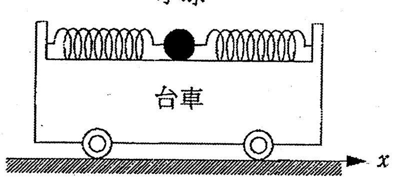


図1

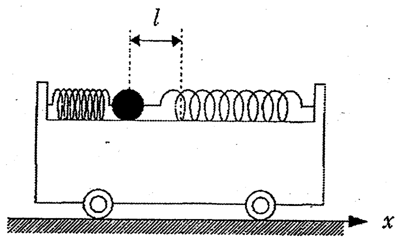
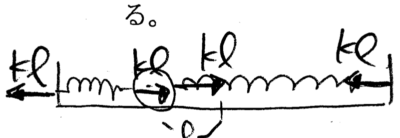


図2

(1)はじめに，台車を動かさないように押さえながら，図2のように小球を台車の中央からlだけ左方へ引っ張ったところで，小球と台車を同時に離した。離した直後の小球の加速度は，2本のばねからx軸の正の方向へそれぞれklの力を受けるので［ア］で与えられ，一方，台車の加速度は，2本のばねからx軸の負の方向にそれぞれklの力を受けるため［イ］で与えられる。小球が台車の中央を通過するときの小球の速さは［ウ］，台車の速さは［エ］となる。



ア. $ma = 2kl$　より　$a = \frac{2kl}{m}$

イ. $MA = -2kl$　より　$A = -\frac{2kl}{M}$

ウ.エ. それぞれv, Vとおいて

力学的エネルギー保存則　$\frac{1}{2}kl^2 \cdot 2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$

運動量保存則　$0 = mv + M(-V)$

これらを解いて.

$v = l\sqrt{\frac{2kM}{m(M+m)}}$, $V = l\sqrt{\frac{2km}{M(M+m)}}$

(2) 次に，同じ台車と小球について，図3のように固定壁に台車の左端が接した状態(台車は壁に固定していない)にして，時刻$t=0$のときに小球に壁の方向へ初速v_0を与えた。このとき，小球と台車の中心，および台車と小球を合わせた系の重心は$x=0$の位置にあり，小球は台車の端までは届かないものとする。

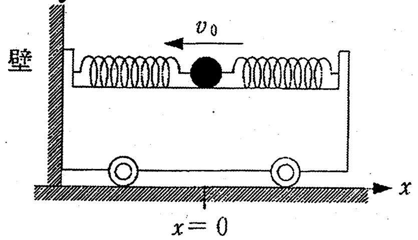


図3

その後の台車と小球の動きを考える。台車は，ばねから壁の方向へ力を受けるため，しばらく壁から離れない。その間の台車，小球の加速度をそれぞれa_1，a_2とし，台車が壁から受ける垂直抗力をN，小球の台車中央からの変位をdとすると，それぞれの運動方程式は，

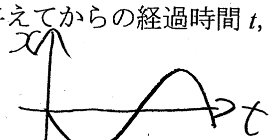
台車：$Ma_1 =$［オ］　$N - 2kd$

小球：$ma_2 =$［カ］　$-2kd$

となる。台車が壁に接している間の小球の変位dは，小球に初速を与えてからの経過時間t，およびv_0，k，mを用いて，

$d =$［キ］

単振動.



となる。垂直抗力Nが0になったときに台車は壁から離れる。台車が壁から離れるまでの経過時間は［ク］となる。

キ　振幅Aは　$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 2kA^2$ より $A = v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}$

また $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ なので

$d = -v_0\sqrt{\frac{m}{2k}} \sin\sqrt{\frac{2k}{m}}t$

ク　$\frac{1}{2}T = \frac{1}{2} \cdot 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} = \pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$

(3) 台車が壁から離れたあとの，台車と小球の動きを考える。

問1　台車が壁から離れたあと台車からみた小球の動きは単振動となることを，導出の過程と共に示せ。また，そのときの角振動数ωを求めよ。

$Ma_1 = 2kd$

$ma_2 = -2kd$.

台車から見た小球の加速度は

$a_2 - a_1 = -\frac{2kd}{m} - \frac{2kd}{M} = -\frac{2k(M+m)}{Mm}d$

∴ aがdに比例(係数負)なので単振動

$a_2 - a_1 = -\omega^2 d$ と比較して

$\omega = \sqrt{\frac{2k(M+m)}{Mm}}$

台車と小球を合わせた系の重心は{ケ：①静止　②等速直線運動　③単振動}しているので，台車が壁から離れてからの経過時間をt_1とすると，この系の重心の位置は［コ］となる。これらから，x座標での台車の中心の位置はt_1，v_0，ω，m，Mを用いると［サ］となり，台車の速度の最大値は［シ］，最小値は［ス］となる。

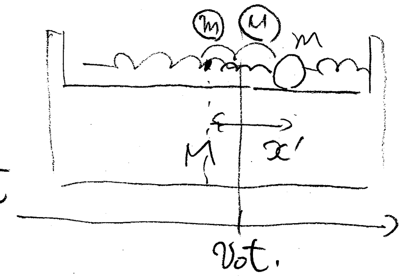
外力なし.

$(M+m)v_{重} = mv_0$ より

コ. $\frac{m}{M+m}v_0 t$

サ. 台車から見た小球は　$v = v_0\cos\omega t$

$x' = -\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$



右図の関係から.

$x_g = \frac{m}{M+m}v_0 t_1 - \frac{m}{M+m}x' = \frac{mv_0}{M+m}(t_1 - \frac{1}{\omega}\sin\omega t_1)$

シ ス　$v_g = \frac{dx_g}{dt} = \frac{mv_0}{M+m}(1-\cos\omega t_1)$　∴ Max $\frac{2mv_0}{M+m}$, min 0

問２　以下の図４を解答欄に書き写し，時刻$t=0$で小球に初速を与えたあとの，台車と小球を合わせた系の重心の x 座標の位置を破線で，台車の中心の x 座標の位置を実線で，グラフを描け。

また，台車が壁から離れたあと最初に台車の速度が最大値をとる点Ａをグラフ中に示し，その x 座標および時刻 t の式を記せ。

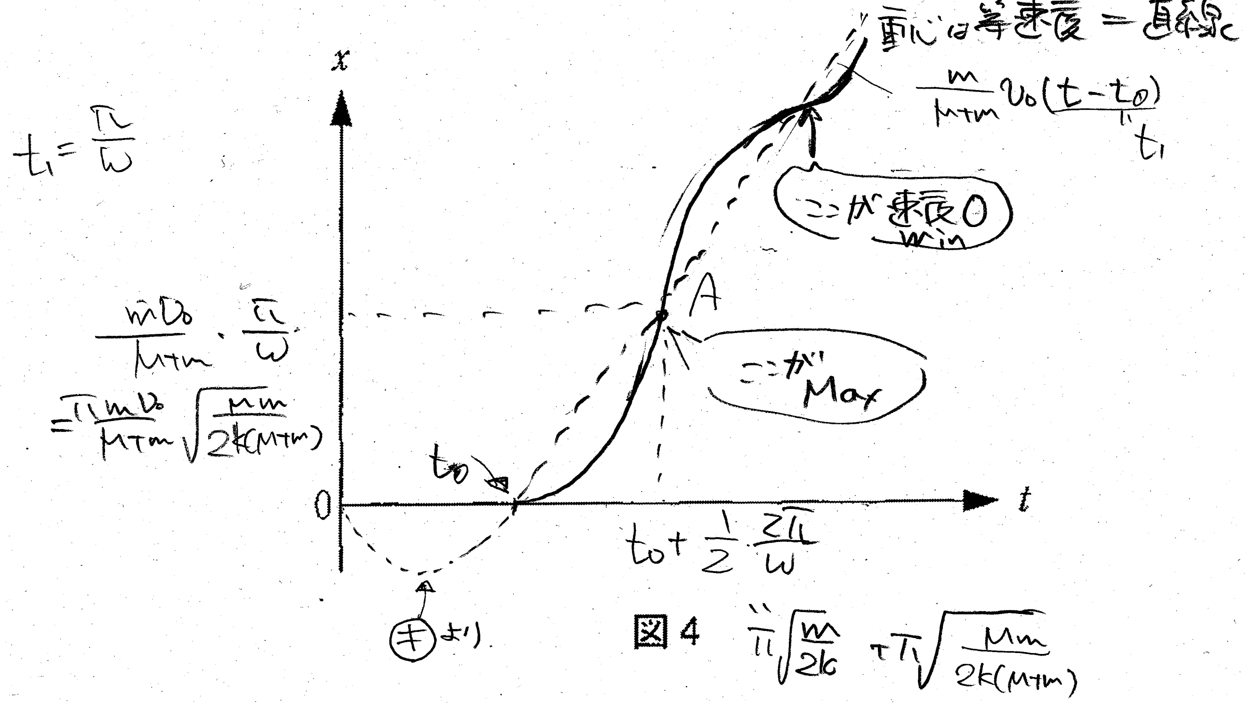


図４

※ $y=x-\sin x$ のグラフ描けますか？

(1) ア $\frac{2kl}{m}$　イ $-\frac{2kl}{M}$　ウ $l\sqrt{\frac{M}{M+m}\cdot\frac{2k}{m}}$　エ $l\sqrt{\frac{m}{M+m}\cdot\frac{2k}{M}}$　(2) オ $2kd+N$

カ $-2kd$　キ $-v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}t$　ク $\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$　(3)ケ ②　コ $\frac{m}{M+m}v_0t_1$

サ $\frac{m}{M+m}v_0\left(t_1-\frac{1}{\omega}\sin\omega t_1\right)$　シ $\frac{2m}{M+m}v_0$　ス 0

問１　小球の台車中央からの変位を y(x 軸の正の向きと同じとする)とし，そのときの台車と小球の加速度をそれぞれa_3，a_4とする。台車，小球それぞれの運動方程式は，

$$Ma_3=2ky,\qquad ma_4=-2ky$$

となり，台車に対する小球の相対加速度は，

$$a_4-a_3=-\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)2ky$$

となる。よって，台車から見て小球は単振動をする。

また，そのときの角振動数ω は，

$$\omega=\sqrt{2k\frac{M+m}{Mm}}$$

問２　右図