2016年　大阪大学　前期

【１】

図１のような，十分長い水平なレールの上を，左右にすべる台がある。この台の上にのせた質量mの小物体の紙面内の運動について考える。台の上面は水平で，小物体との間には摩擦力が働き，動摩擦係数はμ，静止摩擦係数は2μである。台は，小物体が落ちないように紙面内左右に十分長いものとする。以下では，レールの上に静止している観測者から見た運動を考える。力，速度，加速度は，いずれも右向きを正の方向とする。重力加速度の大きさをgとして，以下の問に答えよ。

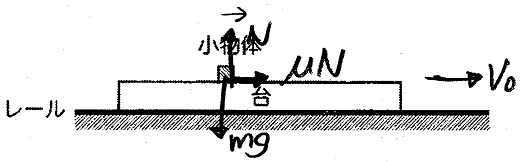


図１

Ⅰ．図１の台を，一定速度V_0 ($V_0>0$) で動かした。その台の上に，小物体を速度 0 で静かにのせ，手をはなした。はじめ，小物体は台から摩擦力を受けて加速し，やがて台とともに速度V_0で動くようになった。

問１　小物体を台の上に置いてから，速度V_0になるまでの間の，小物体の加速度の大きさa_0を求めよ。

運動方程式　$ma_0=\mu mg$　　$\therefore a_0=\mu g.$

問２　小物体を台の上に置いてから，速度V_0になるまでに小物体が進んだ距離をa_0，V_0を用いて示せ。

dとすると．

$$V_0^2-0^2=2a_0d \qquad \therefore d=\frac{V_0^2}{2a_0}$$

Ⅱ．Ⅰ．と同様に一定速度V_0 ($V_0>0$) で動く台に，図２のように支柱を立て，ばね定数kのばね(質量は無視できる)の一端を取り付け，他端に小物体を取り付けた。支柱から見た小物体は，ばねの長さが自然長となる位置から，変位xの位置にあり，$x>0$のとき，ばねは伸びているものとする。小物体を$x=x_0$ ($x_0>0$) の位置で台に固定し，時刻$t=0$で固定を解除した。

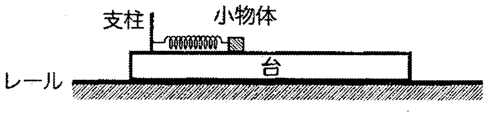


図２

問３　小物体が台に対して運動を始めるためには，x_0がある値x_mを超える必要がある。このx_mをg，k，m，μを用いて表せ。

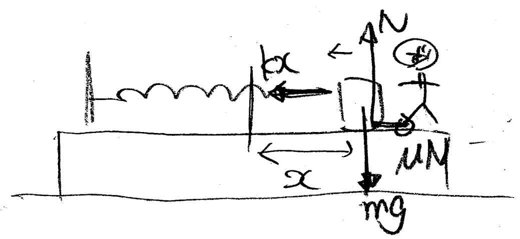
最大摩擦力を超える必要より

$$\therefore kx_m=2\mu\cdot mg \qquad x_m=\frac{2\mu mg}{k}$$

問４　小物体が台に対して左向きに運動し，小物体の変位がxのとき，小物体に水平方向に作用する力をg，k，m，x，μを用いて表せ。

図より．

$\mu mg-kx$

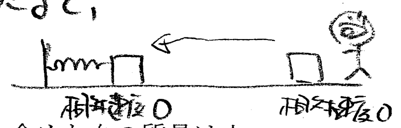


問５　時刻$t=0$で固定を解除するとき，x_0をx_mより大きくした場合について考えよう。小物体の速度vは，$t=0$で$v=V_0$であった。その後，$v<V_0$となり，時刻$t=t_1$で再び$v=V_0$となった。t_1を求めよ。

右はじ　　左はじ

台上の観測者(=慣性力なし)から見ると，

単振動の$\frac{1}{2}$周期なので　$\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$



Ⅲ．図２の台が，レールの上を摩擦なく自由に動けるようにした。支柱も含めた台の質量は小物体と同じmとする。小物体をx_0 ($x_0>x_m$) の位置に固定し台は静止している状態にして，時刻$t=0$で固定を解除したところ，小物体は左向きに運動を始めた。以下では，小物体が左向きに運動している場合について考える。台の加速度をa，小物体の加速度をa'とする。

問６　台の運動方程式を$ma=F$，小物体の運動方程式を$ma'=F'$と書くとき，FとF'を，それぞれg，k，m，x，μを用いて表せ。

問4の図を参考にすると．　台　$ma=kx-\mu mg=F$

小物体　$ma'=-kx+\mu mg=F'$

問７　台と小物体に働く力の和，$F+F'$を求めよ。

問6より　$F+F'=0.$

問８　レールの上に静止している観測者から見た小物体の位置Xを，xを用いて表せ。ただし，小物体が運動を始めて最初に，ばねの長さが自然長になったときの小物体の位置を$X=0$とし，右向きを正の方向とする。

問7より．水平方向は運動量保存
→重心位置不変．
小物体が右へずれると，同じ分だけ台の重心は左にずれる

結果ののびx．

$\therefore X=\frac{x}{2}$

問９　小物体の運動方程式$ma'=F'$において，F'をg，k，m，X，μを用いて表せ。

問8より　$x=2X$　なので

$ma'=-2kX+\mu mg.$

問 10　ばねの長さが初めて極小となる時刻t_2と，そのときの位置Xを，g，k，m，x_0，μのうち，必要なものを用いてそれぞれ表せ。

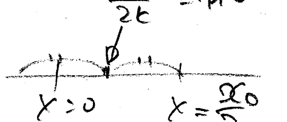
小物体の単振動の左端でばねの長さ極小．

$$ma'=-2k\left(X-\frac{\mu mg}{2k}\right)$$

$$\therefore \pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

図より

$$X=\frac{\mu mg}{2k}-\left(\frac{x_0}{2}-\frac{\mu mg}{2k}\right)$$



問 11　時刻t_2で，小物体は台に対して静止して動かなくなった。この条件を満たすx_0の最大値を，g，k，m，μを用いて表せ。

$\frac{\mu mg}{k}-\frac{x_0}{2}$

ばねの変位は$x=2X=\frac{2\mu mg}{k}-x_0$

$\therefore |kx|=|2\mu mg-kx_0|\leqq 2\mu mg$　であればよい．

$-2\mu mg+kx_0\leqq 2\mu mg$

$x_0\leqq\frac{4\mu mg}{k}$

max $\frac{4\mu mg}{k}$