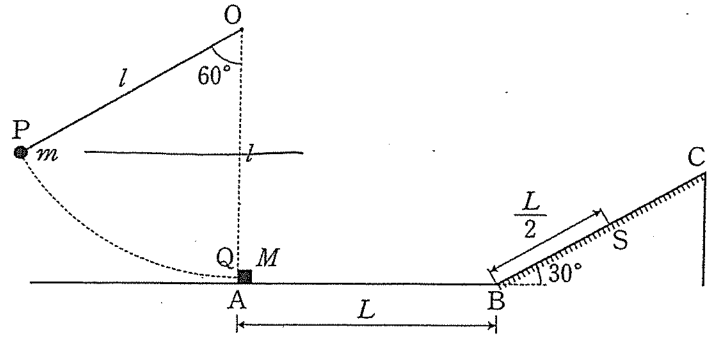
2

2011年　信州大学　前期日程

図のように，質量 m[kg]の球Pがとりつけられた長さ l [m]の軽い糸があり，その他端が水平面から高さ l [m]の点Oに固定されている。糸がたるまないように鉛直方向と角度60°をなす位置まで球 P を持ち上げて静かに離す。球 P は最下点 A に置かれている質量 M[kg]の物体 Q ($M > m$)と衝突し，物体Qは衝突後，なめらかな水平面AB上を L[m]動いた後，角度30°のあらい斜面BC上を直線運動し，距離 $\frac{L}{2}$ [m]だけ動いて点Sで静止した。球Pおよび物体Qの大きさは無視でき，空気抵抗は考えなくてよい。また，点Bにおいて水平面と斜面は，なめらかにつながっているものとする。球Pと物体Qの反発係数を e，物体Qと斜面との間の動摩擦係数を μ'，重力加速度の大きさを g[m/s^2]とする。衝突直前および衝突直後の速度は右向きを正とする。以下の各問に答えよ。答は主な式や説明をつけて解答欄に記入せよ。



(a) 衝突直前の球Pの速度 v_0 [m/s]を g, l を用いて表せ。

仕事の原理

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mg\cdot\frac{l}{2} \iff v_0 = \sqrt{gl} \ \text{[m/s]}$$

(b) 衝突直後の球Pと物体Qの速度をそれぞれ v[m/s], V[m/s]とするとき，v と V を m, M, v_0, e を用いて表せ。

運動量保存

$mv_0 = mv + MV$ —①

$-\ -mev_0 = mv - mV$ —②'

$V = \frac{m(1+e)}{(M+m)}v_0$ [m/s]

反発係数

$e = -\frac{v-V}{v_0-0}$

$mv - mV = -mev_0$ —②

$v = v_0 - \frac{M}{m}V$

$= v_0 - \frac{M(1+e)}{(M+m)}v_0$

$= \frac{m-eM}{M+m}v_0$ [m/s]

(c) 球Pが物体Qとの衝突直後に左向きに運動するのは，反発係数 e の値がどんなときか。e の範囲を m, M を用いて表せ。

$v < 0$ より．

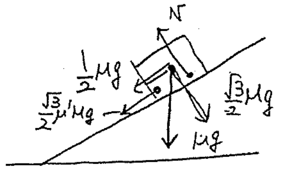
(1.03) $m - eM < 0$.

$\frac{m}{M} < e \leq 1$

(d) 物体Qが点Bから点Sまで運動するときの斜面に沿って上向き方向の加速度 a[m/s^2]を μ', g を用いて表せ。

$$Ma = -\frac{1}{2}Mg - \frac{\sqrt{3}}{2}\mu' Mg$$

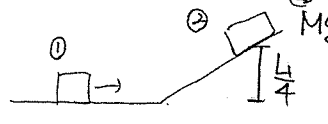
$$a = -\frac{(1+\sqrt{3}\mu')}{2}g$$



(e) 動摩擦力がBS間で物体Qに対してした仕事 W[J]を M, μ', g, L を用いて表せ。

$$W = Fx\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\mu' Mg\cdot\frac{L}{2}\cdot\cos 180° = -\frac{\sqrt{3}}{4}\mu' MgL$$

(f) 動摩擦係数 μ' を V, g, L を用いて表せ。



非保存力の仕事

$$Mg\frac{L}{4} - \frac{1}{2}MV^2 = -\frac{\sqrt{3}}{4}\mu' MgL$$

$$\mu' = \frac{2V^2}{\sqrt{3}gL} - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(g) 物体Qが球Pと衝突してから点Sに達するまでの時間 t[s]を V, L を用いて表せ。

AB間，等速 $t_{AB} = \frac{L}{V}$

BS間．t'[s]として．

$$0 = V - at' = V - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2V^2}{gL} - 1\right)gt'$$

$$V = \frac{V^2}{L}t' \iff t' = \frac{L}{V}$$

$$t = t_{AB} + t' = \frac{2L}{V}$$

答　(a) $v_0 = \sqrt{gl}$ [m/s]　(b) $v = \frac{m-eM}{m+M}v_0$ [m/s]，$V = \frac{(1+e)m}{m+M}v_0$ [m/s]　(c) $\frac{m}{M} < e \leqq 1$

(d) $a = -\frac{(1+\sqrt{3}\mu')}{2}g$ [m/s^2]　(e) $W = -\frac{\sqrt{3}}{4}\mu' MgL$ [J]　(f) $\mu' = \frac{2V^2}{\sqrt{3}gL} - \frac{1}{\sqrt{3}}$　(g) $t = \frac{2L}{V}$ [s]