1 2014年　新潟大学　前期日程

斜面を持つ質量Mの物体Aと，質量$m(<M)$の小物体Bが水平な床に置かれている。重力加速度の大きさをgとして以下の問いに答えよ。ここで，床や物体Aの斜面はなめらかであり，摩擦や空気抵抗は無視できるものとしてよい。

問1　図1のように，静止した物体Aに向かって，左側から小物体Bが速さv_0で進んできた。ここで小物体Bは，物体Aと床の境目をなめらかに移動できるものとする。

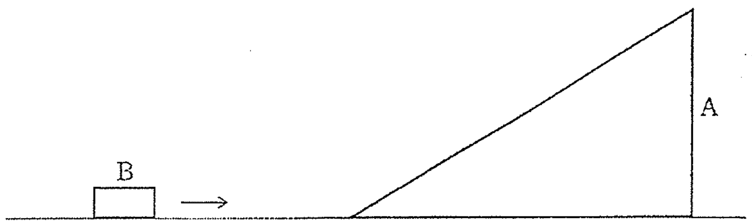
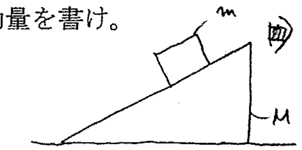


図1

小物体Bが斜面を上がり始めると物体Aも運動を始めた。斜面上で小物体Bが達する最高点の高さをh，そのときの物体Aの速さをVとする。ただし，小物体Bが斜面を越えることはないものとする。

(1)　小物体Bが斜面の最高点に達したときのAとBを合わせた物体系の運動エネルギー，および運動量を書け。



一体と考えて，

$K = \frac{1}{2}(m+M)V^2$

$P = mV + MV$

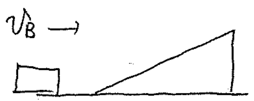
(2)　力学的エネルギー保存，および水平方向の運動量保存の関係を用いて，Vとhを求めよ。

① $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(M+m)V^2 + mgh$　　② $mv_0 = (m+M)V \Leftrightarrow V = \frac{mv_0}{M+m}$ —②'

①,②'より $mgh = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{M+m}(mM+m^2-m^2) \Leftrightarrow h = \frac{Mv_0^2}{2g(M+m)}$

その後，小物体Bは斜面をすべり下りて，物体Aと分かれて床の上を運動した。

(3)　このときの物体Aと小物体Bの速さを，M, m, v_0を用いてそれぞれ表せ。また，運動の向きについてもそれぞれ答えよ。



$mv_0 = Mv_A + mv_B$

$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2$ —②

①より $v_A = \frac{m}{M}(v_0 - v_B)$

②に代入して，

$\times 2$　$mv_0^2 = \frac{m^2}{M}(v_0-v_B)^2 + mv_B^2$

$v_0^2 - v_B^2 = \frac{m}{M}(v_0-v_B)^2$　$v_B \neq v_0$

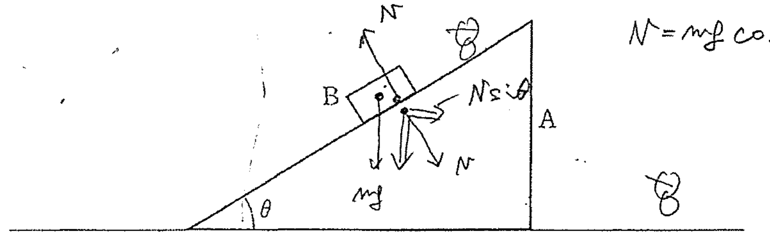
$v_0 + v_B = \frac{m}{M}(v_0 - v_B)$

$\left(\frac{M+m}{M}\right)v_B = \frac{m-M}{M}v_0 \Leftrightarrow v_B = \frac{m-M}{M+m}v_0$ より，$\frac{M-m}{M+m}v_0$ 左向き

$v_A = \frac{m}{M}\left(\frac{M+m-(m-M)}{M+m}\right)v_0 = \frac{2mv_0}{M+m}$ 右向き。

（後半は授業では扱いません）

問2　図2のように，物体Aの斜面が床と角度θをなしているとする。静止した物体Aの斜面上に小物体Bを静かに置いて手をはなすと，AとBは同時に運動を始めた。物体Aの床面に対する加速度を右向きにa_Aとし，斜面に固定された座標系における小物体Bの加速度を斜面に沿って下向きにa_Bとする。また，小物体Bと斜面の間の垂直抗力の大きさをNとする。



$N = mg\cos\theta$

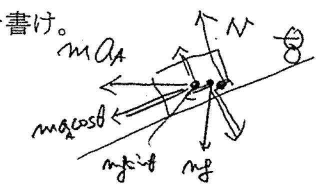
図2

(1)　物体Aの水平方向の運動について運動方程式を書け。

$Ma_A = N\sin\theta$ —①

(2)　斜面に固定された座標系においては物体Aの運動による慣性力がはたらくことに注意して，小物体Bの斜面に沿った方向の運動について運動方程式を書け。

$ma_B = ma_A\cos\theta + mg\sin\theta$ —②



(3)　小物体Bに対して斜面に垂直な方向にはたらく力のつり合いの式を書け。

$N + ma_A\sin\theta - mg\cos\theta = 0$ —③　　①と③より，

$Ma_A + ma_A\sin^2\theta = mg\sin\theta\cos\theta$

(4)　加速度a_BをM, m, θおよびgで表せ。

$\Leftrightarrow a_A = \frac{mg\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}$

②より $a_B = a_A\cos\theta + g\sin\theta$

$= \frac{mg\sin\theta(1-\sin^2\theta) + Mg\sin\theta + mg\sin^3\theta}{M+m\sin^2\theta} = \frac{(m+M)g\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}$ //

答　問1　(1)運動エネルギー…$\frac{1}{2}(M+m)V^2$、運動量…$(M+m)V$　(2)$V = \frac{m}{M+m}v_0$

$h = \frac{Mv_0^2}{2(M+m)g}$　(3)　A　$\frac{2m}{M+m}v_0$，水平右向き　B　$\frac{M-m}{M+m}v_0$，水平左向き

問2　(1)$Ma_A = N\sin\theta$　(2)$ma_B = ma_A\cos\theta + mg\sin\theta$

(3)$N + ma_A\sin\theta = mg\cos\theta$　(4)$a_B = \frac{(M+m)\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}g$