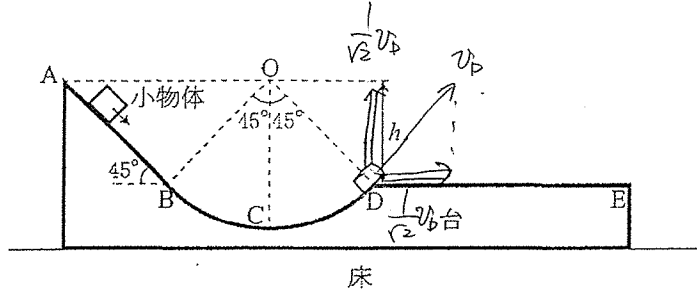


図のように、水平面からの傾き45°の斜面AB，円弧BCD，十分に長い水平面DEからなる台が、水平な床の上におかれている。点Aは円弧の中心Oと同じ高さであり，OBおよびODは鉛直線

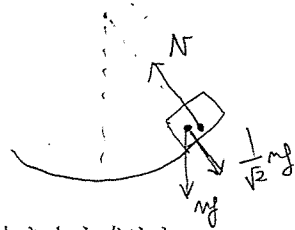


OCとそれぞれ左右に45°の角度をなす。水平面DEを基準とする，点Oおよび点Aの高さはhであり，したがって円弧BCDの半径は $\sqrt{2}h$ となる。大きさの無視できる質量mの小物体を点Aから静かにはなしたところ，小物体は斜面と円弧に沿って運動し，点Dで飛び出した後，再び台の上に落下した。小物体は紙面内でのみ運動するものとし，摩擦と空気抵抗は無視する。重力加速度の大きさをgとして，以下の間に答えよ。

I. 台が床に固定されている場合について考える。

問1 点Dにおける小物体の速さ(速度の大きさ)を求めよ。

$$mgh = \frac{1}{2} m v_D^2 \quad v_D = \sqrt{2gh}$$



問2 点Dにおいて台から飛び出す直前に小物体が受ける垂直抗力の大きさを求めよ。

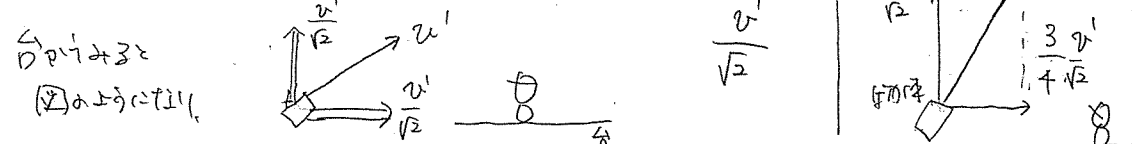
円運動の運動方程式 $m \frac{(\sqrt{2gh})^2}{\sqrt{2}h} = N - \frac{1}{\sqrt{2}} mg \Leftrightarrow \frac{2mgh}{\sqrt{2}} = N - \frac{1}{\sqrt{2}} mg \Leftrightarrow N = \frac{3}{\sqrt{2}} mg$

問3 台から飛び出した小物体が落下する地点を台上の点Fとすると，DF間の距離を求めよ。

$v_D = \frac{1}{\sqrt{2}} v_{D0}$ より $y = \sqrt{gh} t - \frac{1}{2} g t^2$ かつ $t = 2\sqrt{\frac{h}{g}}$
 落下時間 t_1 とし $\sqrt{gh} t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = 0$ かつ x 方向は等速より $x = v_{Dx} t_1 = \sqrt{gh} \cdot 2\sqrt{\frac{h}{g}} = 2h$

II. 次に，台が床に対してなめらかに動ける場合について考える。台の質量を3mとする。はじめ，台は床に対して静止しており，小物体を点Aではなすことによって動き出す。台の運動も紙面内でのみ起こるものとする。

問4 小物体の点Dにおける台に対する相対速度の大きさを v' とする。このときの小物体の速度の鉛直成分(上向きを正とする)を v' を用いて表せ。



問5 台と小物体についての運動量保存則を考慮することで，小物体の点Dにおける床に対する速度の水平成分と，このときの床に対する台の速度(ともに右向きを正とする)のそれぞれを v' を用いて表せ。

水平方向の運動量保存 $0 = m v + 3m V - (1)$
 相対速度 $v - V = \frac{1}{\sqrt{2}} v' - (2)$
 $v + 3V = 0$
 $v - V = \frac{1}{\sqrt{2}} v'$
 $v = -3V = \frac{3}{4\sqrt{2}} v'$

問6 v' をm, g, hのうち必要なものを用いて表せ。

力学的エネルギー保存 (地上の位置) $mgh = \frac{1}{2} m \frac{25}{16} v'^2 + \frac{1}{2} \cdot 3m \cdot \frac{v'^2}{16}$
 $\frac{28}{32} v'^2 = 2gh \Leftrightarrow v' = \sqrt{\frac{64}{28} gh} = 4\sqrt{\frac{gh}{7}}$

問7 台から飛び出した小物体が落下する地点を台上の点Fとすると，DF間の距離をhを用いて表せ。

$y = 4\sqrt{\frac{gh}{14}} \cdot t' - \frac{1}{2} g t'^2 = 0$ かつ $x = 4\sqrt{\frac{gh}{14}} \cdot t' \sqrt{\frac{h}{14g}}$
 $t' = 8\sqrt{\frac{h}{14g}}$
 $x = \frac{32}{14} h = \frac{16}{7} h$

問8 小物体が点Dにおいて台から飛び出す直前における，床に対する台の加速度(右向きを正とする)をgを用いて表せ。

自由落下の運動方程式 $m \cdot \frac{16}{7} gh = N - \frac{1}{\sqrt{2}} mg + \frac{1}{\sqrt{2}} m a$
 $\frac{23}{7} mg = \sqrt{2} N + m a - (3)$
 $3m a = \frac{1}{\sqrt{2}} N$
 $6m a = \sqrt{2} N - (4)$
 $\frac{23}{7} mg = 7m a$
 $a = \frac{23}{49} g$

答 I. 問1 $\sqrt{2gh}$ 問2 $\frac{3}{\sqrt{2}} mg$ 問3 $DF = 2h$

II. 問4 $\frac{v'}{\sqrt{2}}$ 問5 水平成分 $\frac{3}{4\sqrt{2}} v'$ 、速度 $-\frac{1}{4\sqrt{2}} v'$ 問6 $v' = 4\sqrt{\frac{gh}{7}}$

問7 $DF' = \frac{16}{7} h$ 問8 $\frac{23}{49} g$