$\boxed{2}$ 2010年　北海道大学　前期日程

ばね定数 k[N/m]，自然長 l[m]で質量の無視できるつる巻きばねにつながれた，質量 m[kg]の小球の運動を考える。ばねが切れることはなく，ばねの弾性力の大きさは常にばねの伸びに比例する。また，ばねは伸び縮みするだけで曲がることはなく，小球がばねから受ける力は常にばねと平行である。以下の文章の $\boxed{}$ に適切な数式を入れよ。

問１　図１のように，水平に置かれた十分大きな平板に，ばねの一端をとりつけ，その点を O とする。平板はなめらかで，小球と平板の間の摩擦は無視できる。

小球を平板上で，点 O を中心に半径 r[m]($r>l$)で等速円運動させた。小球の速さを v[m/s]とすると，等速円運動の角速度は，v，r を用いて，$\boxed{(1)}$ [rad/s]と表され，向心力の大きさは，m，v，r を用いて，$\boxed{(2)}$ [N]となる。また，小球がばねから受ける力の大きさは，k，r，l を用いて，$\boxed{(3)}$ [N]と表され，この力が向心力と等しいという条件から，角速度は，m，k，r，l を用いて，$\boxed{(4)}$ [rad/s]となる。このことから，角速度の上限値は $\boxed{(5)}$ [rad/s]となる。

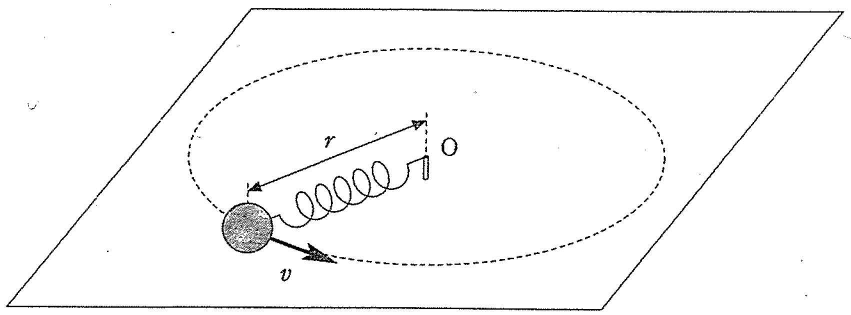

図１

(1) $v = r\omega$ から，$\omega = \frac{v}{r}$

(2) 「向心力」は，$ma = m\boxed{\frac{v^2}{r}}\,a$

(3) 図より $k(r-l)$

(4) $k(r-l) = m\frac{v^2}{r}$

$\Leftrightarrow k(r-l) = mr\omega^2$

$\omega = \sqrt{\frac{k(r-l)}{mr}}$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1-\frac{l}{r}\right)}$

$\lim_{r\to\infty} \omega = \sqrt{\frac{k}{m}(1-0)} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ //

答　問１　(1) $\frac{v}{r}$　(2) $m\frac{v^2}{r}$　(3) $k(r-l)$　(4) $\sqrt{\frac{k(r-l)}{mr}}$　(5) $\sqrt{\frac{k}{m}}$

問２　次に，図２のようにばねの一端を天井にとりつけ，その点を O とし，点 O から鉛直方向に鉛直軸をとる。以下，重力加速度の大きさを g[m/s^2]とする。

小球を，点 O からの距離 r[m]($r>l$)及びばねと鉛直軸がなす角度 θ を一定に保ちながら，水平面内で等速円運動させた。等速円運動の角速度を ω [rad/s]とすると，向心力の大きさは，m，r，θ，ω を用いて，$\boxed{(6)}$ [N]となる。また，小球がばねから受ける力の水平成分の大きさは，k，r，l，θ を用いて，$\boxed{(7)}$ [N]と表され，この力が向心力と等しいという条件から，角速度 ω は，m，k，r，l を用いて，$\boxed{(8)}$ [rad/s]となる。さらに，小球がばねから受ける力の鉛直成分の大きさは，k，r，l，θ を用いて，$\boxed{(9)}$ [N]である。この鉛直成分と重力がつりあう条件から，角度 θ は，$\cos\theta = \boxed{(10)}$ を満たすことがわかる。この関係を用いて，$\boxed{(8)}$ から k，l を消去すると，角速度は g，r，θ を用いて，$\boxed{(11)}$ [rad/s]と表される。また，以上のことから，等速円運動が実現するためには，$r > \boxed{(12)}$ [m]でなければならないことがわかる。

(6) 向心力は，半径をRとすると，

$F = mR\omega^2 = mr\sin\theta\cdot\omega^2$,

(7) 図より，

$k(r-l)\sin\theta$,

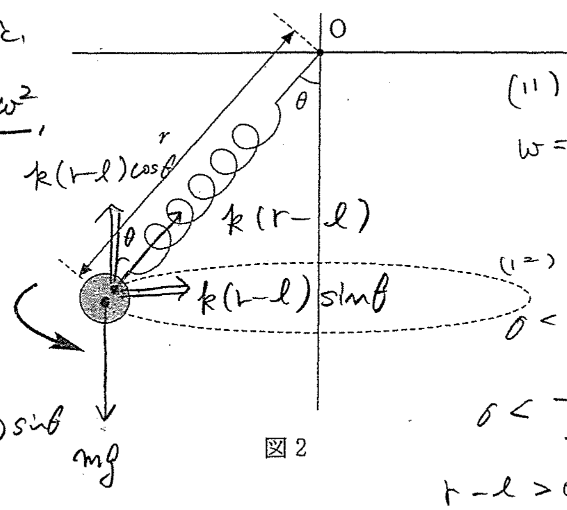

図２

(8)

$mr\sin\theta\cdot\omega^2 = k(r-l)\sin\theta$

$\omega = \sqrt{\frac{k(r-l)}{mr}}$

(9) $k(r-l)\cos\theta$

(10) $k(r-l)\cos\theta = mg$

$\cos\theta = \frac{mg}{k(r-l)}$ //

(11) $k(r-l)$

$\omega = \sqrt{\frac{\frac{mg}{\cos\theta}}{mr}} = \sqrt{\frac{g}{r\cos\theta}}$

(12) $0<\theta<90^\circ$ であり，

$0<\cos\theta<1$

$0 < \frac{mg}{k(r-l)} < 1$.

$r-l>0$ より，$\frac{mg}{k(r-l)} > 0$,

$\frac{mg}{k(r-l)} < 1$.

$mg < k(r-l)$

$r > l + \frac{mg}{k}$ //

答　問２　(6) $mr\omega^2\sin\theta$　(7) $k(r-l)\sin\theta$　(8) $\sqrt{\frac{k(r-l)}{mr}}$　(9) $k(r-l)\cos\theta$　(10) $\frac{mg}{k(r-l)}$

(11) $\sqrt{\frac{g}{r\cos\theta}}$　(12) $l+\frac{mg}{k}$