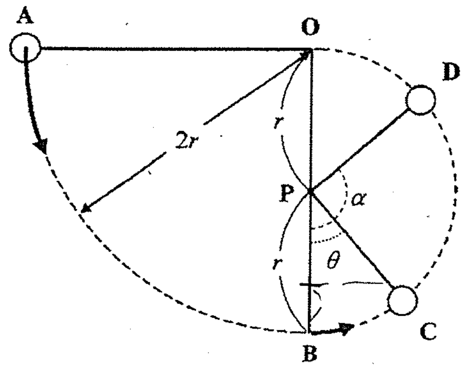
1　2006年　島根大学 前期日程

鉛直面内で，図のように長さ$2r$のひもの一端をO点に固定し，他方に質量mの小球をつけO点と同じ高さのA点より静かに離した。点Oから鉛直下方に距離r離れた点Pにはピンがつけられており，小球は最下点Bを通過した後，点Pを中心に半径rの円運動を始めた。その後，小球が鉛直線となす角がαとなる点Dを通過した直後から，ひもがたわみ始めた。重力加速度をgとして次の問いに答えよ。ただし，ひもの質量や伸び縮み，および空気の摩擦は考えないものとする。

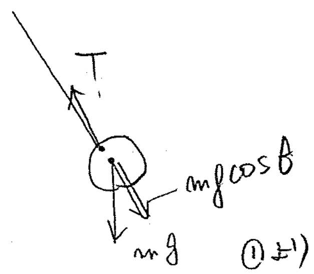


(1)　鉛直線となす角がθの点(図のC点)を通過するときの，小球の速さv_Cを求めよ。ただし$0<\theta<\alpha$とする。

$$mg\cdot 2r = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgr(1-\cos\theta)$$

$$v_C = \sqrt{2gr(1+\cos\theta)} \quad -①$$

(2)　小球がC点を通過するときのひもの張力Tを求めよ。



$$m\cdot\frac{v_C^2}{r}$$

$$m\frac{v_C^2}{r} = T - mg\cos\theta$$

①より

$$\Leftrightarrow \quad T = m\left(\frac{2gr(1+\cos\theta)}{r} + g\cos\theta\right)$$

$$= mg(2+3\cos\theta)$$

(3)　$\cos\alpha$を求めよ。

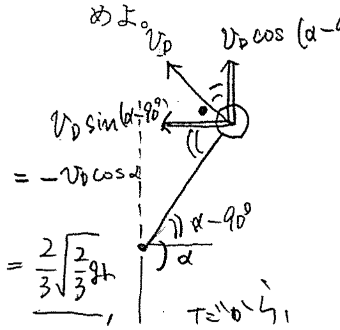
たわむとき，

$T=0$ より，

$$mg(2+3\cos\alpha)=0$$

$$\cos\alpha = -\frac{2}{3}$$

(4)　小球は点Dを通過した後，いくらの高さまであがるか。最高点でのBからの高さhを求めよ。



だから，

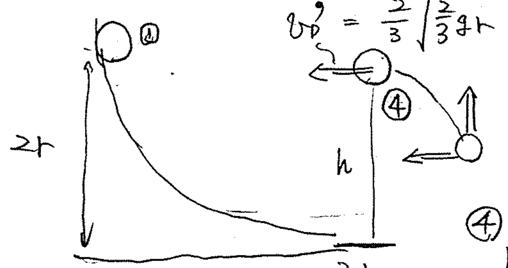
このとき，v_Dについて，

エネルギー保存則より

$$mg\cdot 2r = \frac{1}{2}mv_D^2 + mgr\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$$

($\cos\alpha$)

$$v_D^2 = 2\times\frac{1}{3}gr \quad\Leftrightarrow\quad v_D = \sqrt{\frac{2}{3}gr}$$



①と④を比べて，

エネルギー保存則

$$① \quad mg\,2r = \frac{1}{2}\cdot m\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}gr}\right)^2 + mgh \quad ④$$

$$mg\cdot 2r = \frac{1}{2}\cdot mg\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}r + mgh$$

$$h = 2r - \frac{4}{27}r = \frac{50}{27}r$$

答（1）$v_C=\sqrt{2gr(1+\cos\theta)}$　（2）$T=mg(2+3\cos\theta)$　（3）$\cos\alpha=-\frac{2}{3}$　（4）$\frac{50}{27}r$