2 2014 年　埼玉大学　後期日程

解答はすべての答案用紙の所定の欄に，最後の結果に至るまでのすじみちがわかるように記入すること。

内径 r，中心点 O の固定された球の内面を，物体 P および Q が運動している場合を考える。球の内面はなめらかであり，空気抵抗は無視できるものとする。物体 P，Q は大きさの無視できる物体として扱い，物体 P の質量を m，物体 Q の質量を $\frac{m}{5}$ とする。重力加速度の大きさは g とする。

まず図 1 のように，物体 P が一定の速さ v_0 で水平回転運動をしている場合を考える。OP は鉛直方向と一定角度 θ_0 をなし，$0<\theta_0<\frac{\pi}{2}$ とする。

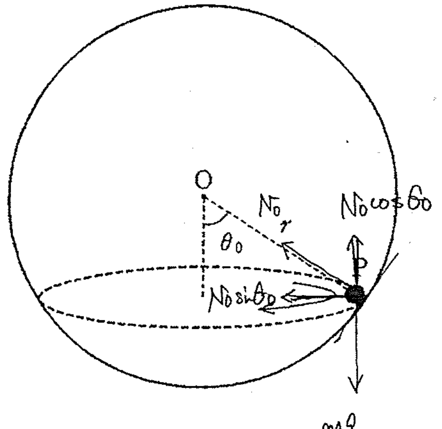


図 1

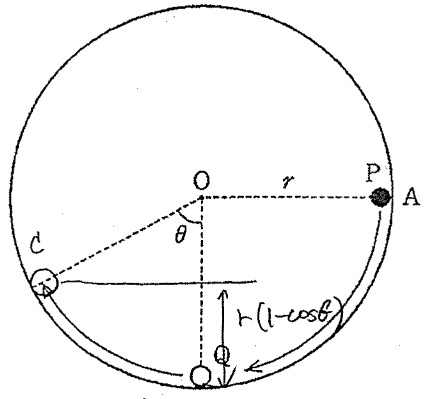


図 2

問 1　物体 P に働く球の内面からの垂直抗力 N_0 を，m，g，θ_0 を用いて表せ。また，物体 P の速さ v_0 を r，g，θ_0 を用いて表せ。

鉛直方向 つり合い　$N_0\cos\theta_0 = mg$

$$N_0 = \frac{mg}{\cos\theta_0}$$

中心方向 運動方程式　$m\cdot\frac{v_0^2}{r\cos\theta} = N_0\sin\theta_0$

$$v_0^2 = \frac{gr}{\cos\theta_0}\sin^2\theta_0 \iff v_0 = \sqrt{\frac{gr}{\cos\theta_0}}\cdot\sin\theta_0$$

問 2　物体 P の水平回転運動の周期 T を，r，g，θ_0 を用いて表せ。θ_0 が限りなく 0 に近いときの T を求めよ。また，θ_0 の増大に伴い T の値は大きくなるか小さくなるか，答えよ。

$$T = \frac{2\pi(r\sin\theta)}{v_0} = \frac{2\pi r\cancel{\sin\theta_0}}{\sqrt{\frac{gr}{\cos\theta_0}}\cancel{\sin\theta_0}} = 2\pi\sqrt{\frac{r\cos\theta_0}{g}}$$

$\theta_0\to 0$ で，$\cos\theta_0\to 1$ より

$$\lim_{\theta_0\to 0} T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

$\theta_0\to$ 大 で，$\cos\theta_0\to$ 小 より，$T\to$ 小

次に図 2 のように，物体 P が鉛直方向の円に沿って運動する場合を考える。中心点 O と等しい高さの球の内面点 A に静止した物体 P を置き，手を離して球の内面に沿って運動させる。最下点 B において，物体 P は物体 Q と非弾性衝突する。反発係数 $e=\frac{4}{5}$ として，以下の問に答えよ。

力学的エネルギー保存則　A点　$mgr = \frac{1}{2}mv_{P0}^2$　B点　より　$v_{P0} = \sqrt{2gr}$

問 3　衝突直前の物体 P の速さ v_{P0}，および，衝突直後の P，Q の速さ v_P，v_Q を求めよ。

運動量保存則　$mv_{P0} = mv_P + \frac{1}{5}mv_Q \iff 5v_{P0} = 5v_P + v_Q$ —①

反発係数 e より　$\frac{4}{5} = -\frac{v_P - v_Q}{v_{P0} - 0}$

$\iff 4v_{P0} = 5v_Q - 5v_P$ —②

①＋② より　$9v_{P0} = 6v_Q$

$v_Q = \frac{3}{2}v_{P0} = 3\sqrt{\frac{gr}{2}}$

①より　$v_P = v_{P0} - \frac{1}{5}v_Q = \frac{7}{10}\sqrt{2gr} = \frac{7}{5}\sqrt{\frac{gr}{2}}$

問 4　衝突後，物体 Q は円の内面に沿って運動する。OQ が鉛直方向となす角度を θ として，角度 θ における物体 Q の速さ v と物体 Q に働く垂直抗力 N の大きさを求めよ。

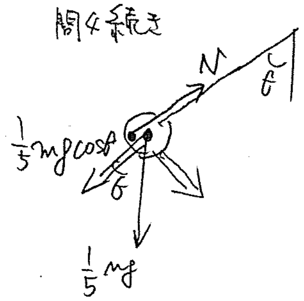
Q について　力学的エネルギー保存則　図のC点

B点　$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}m\cdot v_Q^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}mv^2 + \frac{1}{5}mgr(1-\cos\theta)$

$$v^2 = v_Q^2 - 2gr(1-\cos\theta) = \frac{9}{2}gr - 2gr + 2gr\cos\theta \iff v = \sqrt{\left(\frac{5}{2}+2\cos\theta\right)gr}$$

問 5　物体 Q が円の内面から離れるときの位置の角度を θ_1 として，$\cos\theta_1$ を求めよ。

問4続き



図より，中心方向の運動方程式は，

$$\frac{1}{5}m\cdot\frac{v^2}{r} = N - \frac{1}{5}mg\cos\theta$$

$$N = \frac{1}{5}m\left(\frac{5}{2}+2\cos\theta+\cos\theta\right)g$$

$$= \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\cos\theta\right)mg$$

問5

$\theta=\theta_1$ で $N=0$ として，

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\cos\theta_1\right)=0$$

$$\cos\theta_1 = -\frac{5}{6}$$

答　問 1　$N_0=\dfrac{mg}{\cos\theta_0}$，$v_0=\sin\theta_0\sqrt{\dfrac{gr}{\cos\theta_0}}$　問 2　$T=2\pi\sqrt{\dfrac{r\cos\theta_0}{g}}$，$\theta_0\fallingdotseq 0$ のとき $T\fallingdotseq 2\pi\sqrt{\dfrac{r}{g}}$，小さくなる　問 3　$v_{P0}=\sqrt{2gr}$，$v_P=\dfrac{7}{5}\sqrt{\dfrac{gr}{2}}$，$v_Q=3\sqrt{\dfrac{gr}{2}}$　問 4　$v=\sqrt{\left(\dfrac{5}{2}+2\cos\theta\right)gr}$，$N=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{5}\cos\theta\right)mg$　問 5　$\cos\theta_1=-\dfrac{5}{6}$