③ 2013年　北海道大学　前期日程

図1のように，点Oに一端が固定された長さl [m]の糸の他端に質量m[kg]の小球を取りつけ，この小球を鉛直面内で運動させる。以下の文章中の $\boxed{(1)}$ ～ $\boxed{(9)}$ に適切な数式または数値を入れよ。ただし，糸は伸び縮みせず，その質量は無視できる。また，重力加速度の大きさをg[m/s^2]とする。

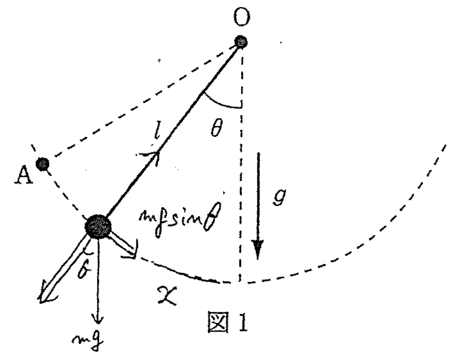


図1

問1　小球を点Aまで糸がたるまないように移動し，その後静かに離したところ，小球は単振り子として最下点を中心に振動した。振幅が十分に小さいときの周期は $\boxed{(1)}$ [s]である。

つぎに，小球を最下点で静止させた後，速さv_0 [m/s]で水平方向に打ち出した。このとき，小球は糸がたるむことなく運動した。糸と鉛直下向きとのなす角度がθ[rad]のとき，重力による小球の位置エネルギーは最下点にあるときと比べ $\boxed{(2)}$ [J]増加し，小球の速さは $\boxed{(3)}$ [m/s]となる。また，糸の張力は $\boxed{(4)}$ [N]となる。糸がたるむことなく小球が単振り子として振動するためにはθの大きさが常に$\frac{\pi}{2}$以下となる必要があるので，$v_0^2 \leqq \boxed{(5)}$ でなければならない。

(1)

$ma = -mg\sin\theta$

θが小さいとき、

$ma = -mg\theta$

$= -mg\frac{x}{l}$

$m(-\omega^2 x) = -m\frac{g}{l}\cdot x$

$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ //

(2) 高さ $h = l(1-\cos\theta)$

$U = mgh = mgl(1-\cos\theta)$ //

(3)

$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1-\cos\theta)$

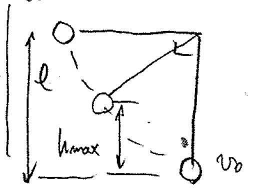
$v = \sqrt{v_0^2 - 2gl(1-\cos\theta)}$ —①

(4)

$m\cdot\frac{v^2}{l} = S - mg\cos\theta$

①より、$S = \frac{mv_0^2}{l} - 2mg + 3mg\cos\theta$ //

(5)



$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_{max}$

$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} \leqq l$

$v_0 \leqq \sqrt{2gl}$ //

問2　図1の単振り子を加速度a[m/s^2]で水平方向に等加速度運動する車に乗せた。単振り子を車内で観察すると，図2のように糸が斜めに傾き，小球は点Pで静止していた。このときの糸の張力は$2mg$ [N]であったとすると，糸が鉛直下向きとなす角度θ_1は $\boxed{(6)}$ [rad]，車の加速度aは $\boxed{(7)}$ [m/s^2]である。また，点Pを中心として小球を小さく振動させると，その周期は $\boxed{(1)}$ の $\boxed{(8)}$ 倍となる。

この小球を再び点Pに静止させた後，糸に垂直な方向に速さv_1 [m/s]で打ち出した。このとき糸がたるむことなく小球が点Oを中心に円運動を行うためには，$v_1^2 \geqq \boxed{(9)}$ という条件を満たす必要がある。

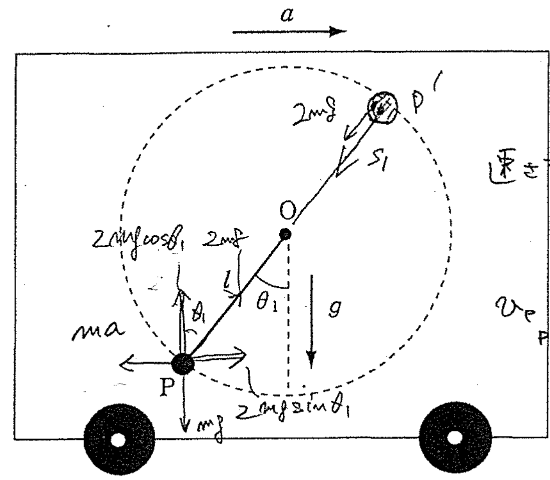


図2

(6) 図より、

$2mg\cos\theta_1 = mg$

$\cos\theta_1 = \frac{1}{2}$

$\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ //

(7) 力のつり合いより

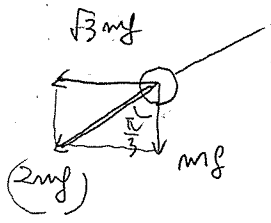
慣性力 $ma = 2mg\sin\theta_1$

$a = 2g\sin\theta_1$

$= \sqrt{3}g$ //

(8) このとき、見かけの重力(加速度)は、

$\frac{\pi}{3}$方向に$2mg$ $(2g)$ であり、



$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$ である。

よって、$\frac{1}{\sqrt{2}}$倍 //

(9) Pの反対側の点P'で、張力$S_1 \geqq 0$となればよい。

速さをv_Pとして、

$m\frac{v_P^2}{l} = S_1 + 2mg$ —②

v_Pについて、力学的エネルギー保存則より

$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_P^2 + m\cdot 2g\cdot 2l$

$v_P^2 = v_1^2 - 8gl$ —③

②、③より

$S_1 = m\frac{v_1^2}{l} - 8mg - 2mg \geqq 0$

$v_1^2 \geqq 10gl$ //

答　問1(1)$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$　(2)$mgl(1-\cos\theta)$　(3)$\sqrt{v_0^2-2gl(1-\cos\theta)}$　(4)$\left(\frac{mv_0^2}{l}\right)-2mg+3mg\cos\theta$

(5)$2gl$

問2(6)$\frac{\pi}{3}$　(7)$g\sqrt{3}$　(8)$\frac{1}{\sqrt{2}}$　(9)$10gl$