1 2012年　熊本大学　前期日程

図1のように，質量 m のおもりにばね定数が k と $2k$ のばねの一端を取り付け，それぞれのばねの他端を台の壁に固定した。台の面に平行な方向を x 方向とする。ばねの質量は無視でき，台と物体の間には摩擦はないものとし，重力加速度を g とする。

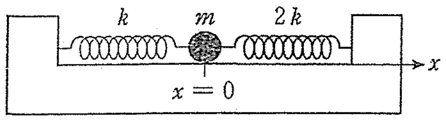


図1

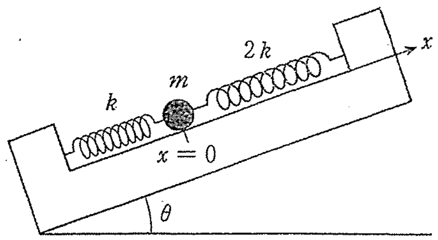
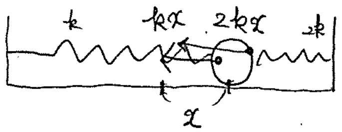


図2

まず，台を水平に置いた。このとき，両方のばねは自然の長さになっており，静止しているおもりの位置を原点 $x=0$ とする。そのおもりを $x=l_0$ の位置までずらして，時刻 $t=0$ で静かに放すとおもりは単振動した。以下の問いに答えよ。

(問1)　変位 x でのおもりにかかる復元力 F を求めよ。また，単振動の周期 T を m，k を用いて表せ。

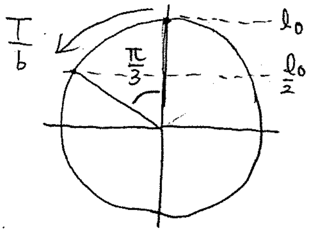


図より、

$$F = -kx - 2kx = -3kx$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$$

(問2)　手放されたおもりの変位が，最初に $x=\frac{l_0}{2}$ になる時刻 t_1 を m，k で表せ。



$$t_1 = \frac{T}{6} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{3k}}$$

あるいは、

$$x(t) = l_0\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}\cdot t$$

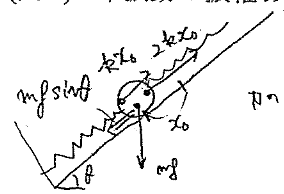
$$\frac{l_0}{2} = l_0\cos\boxed{\sqrt{\frac{3k}{m}}\cdot t_1} \quad \frac{\pi}{3}$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{m}{3k}}\cdot\frac{\pi}{3}$$

次に，台を水平から角度 θ だけ傾けると，図2のようにおもりは釣り合いの位置で静止した。この静止位置を新たに原点とし，斜面の上向きを x 軸の正方向とする。

ばねが自然の長さになるようにおもりを手でもどし，静かに放すとおもりは単振動した。以下の問いに答えよ。

(問3)　単振動の振幅 A と角振動数 ω を m，k，g，θ のうち，必要なものを用いて表せ。



問1の原点からのつり合いの位置のずれを、x_0として、

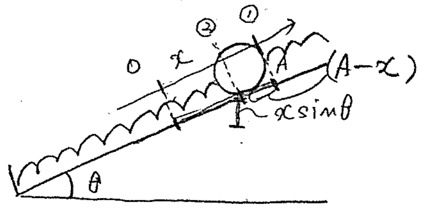
力のつり合いより $2kx_0 + kx_0 - mg\sin\theta = 0$

$$x_0 = \frac{mg\sin\theta}{3k} \ (= A)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

(問4)　変位 x でのおもりの速さを v とする。変位 x におけるおもりの力学的エネルギー E を m，k，g，θ，A，x，v を用いて表せ。ただし，位置エネルギーの基準点は $x=0$ の高さとする。

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot 3k\cdot(A-x)^2 + mgx\sin\theta$$



(問5)　(問4)の結果を用いて，おもりの位置が $x=\frac{A}{3}$ にあるときのおもりの速さ v_1 を m，k，g，θ，で表せ。

$$① \ mgA\sin\theta = ② \ \frac{3}{2}k\cdot\left(\frac{2A}{3}\right)^2 + mg\frac{A}{3}\sin\theta + \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{2}{3}mgA\sin\theta - \frac{3}{2}k\cdot\frac{4}{9}A^2$$

問3より

$$v_1^2 = \left(\frac{4}{3}g\sin\theta - \frac{4}{3}\frac{g\sin\theta}{3}\right)\overset{A}{\boxed{\frac{mg\sin\theta}{3k}}}$$

$$= \frac{8}{27}\frac{m}{k}\cdot g^2\sin^2\theta$$

$$v_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{m}{k}}\cdot g\sin\theta = \frac{2\sqrt{6}}{3}\sqrt{\frac{m}{9k}}g\sin\theta$$

答(問1) $F=-3kx$， $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$　(問2) $t_1=\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{3k}}$　(問3) $A=\frac{mg\sin\theta}{3k}$， $\omega=\sqrt{\frac{3k}{m}}$

(問4) $E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{3}{2}k(A-x)^2+mgx\sin\theta$　(問5) $v_1=\frac{2\sqrt{6}}{9}\sqrt{\frac{m}{k}}g\sin\theta$