

図1(a)のように、質量の無視できるばね定数 k [N/m] のばねの上端を天井に固定する。その後、ばねの下端に質量 m [kg] の物体を静かにつるしたところ、図1(b)のように、自然の長さから x_0 [m] だけ伸びた位置で静止した。このときのばねの下端の位置を原点 O とし、鉛直下向きに x 軸をとる。

以下の問いについて、計算過程も記入して答えよ。ただし、物体は x 軸方向でのみ運動し、空気抵抗は無視できるものとする。また、重力加速度の大きさを g [m/s²] とし、重力による位置エネルギーの基準面を原点 O とする。問題または解答用紙に指示がある場合は、必ず計算過程も記入すること。

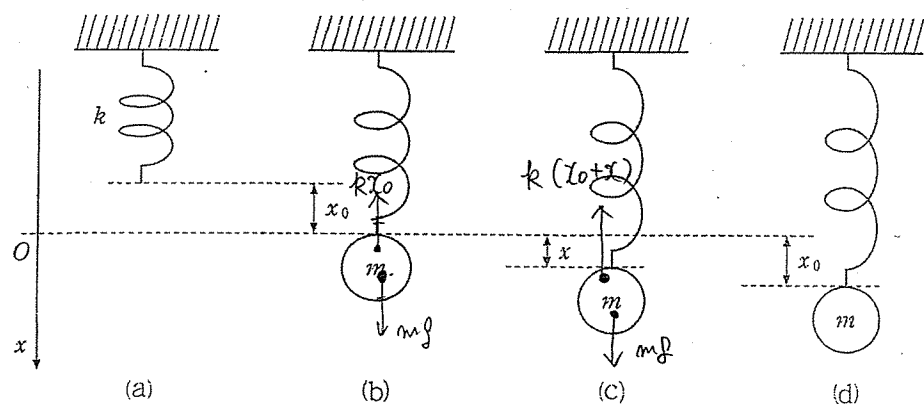


図1
力のつり合い

問1 図1(b)に示した x_0 [m] を求めよ。

$$mg - kx_0 = 0$$

$$x_0 = \frac{mg}{k} \text{ [m]}$$

問2 図1(b)の状態から、ばねが自然の長さになるまで物体を持ち上げ、静かに手を離すと振動した。物体が図1(c)の位置にあるとき、物体がばねから受ける力と重力の合力 F [N] を求めよ。

$$F = -k(x_0 + x) + mg = -k \left(\frac{mg}{k} + x \right) + mg = -kx \text{ [N]}$$

問3 振動している物体が図1(c)の位置にあるときの運動方程式を導出し、振動の周期 T [s] を求めよ。

$$ma = -kx$$

$$m(-\omega^2 x) = -kx$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \text{ [s]}$$

問4 振動している物体の最大速度の大きさを v_{\max} [m/s] とする。

重力による位置エネルギー

(1) 振動している物体が図1(b)の位置にあるときの力学的エネルギー E_1 [J] を求めよ。基準を原点とする。

$$E_1 = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 + \frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 + \frac{m^2 g^2}{2k} \text{ [J]}$$

(2) 振動している物体が図1(d)の位置にあるときの力学的エネルギー E_2 [J] を求めよ。

$$E_2 = 0 + \frac{1}{2} k (2x_0)^2 = mgx_0 = 2mgx_0 - mgx_0 = mgx_0$$

$$= \frac{m^2 g^2}{k} \text{ [J]}$$

(3) v_{\max} [m/s] を求めよ。

力学的エネルギーは保存される

$E_1 = E_2$ とし、

$$\frac{1}{2} m v_{\max}^2 + \frac{m^2 g^2}{2k} = \frac{m^2 g^2}{k}$$

$$v_{\max}^2 = \frac{m g^2}{k}$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot g \text{ [m/s]}$$

答 問1 $x_0 = \frac{mg}{k}$ [m] 問2 $F = -kx$ [N] ($F = mg - k(x_0 + x)$) 問3 $ma = -kx$, $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ [s]

問4 (1) $E_1 = \frac{m^2 g^2}{2k} + \frac{1}{2} m v_{\max}^2$ [J] (2) $E_2 = \frac{m^2 g^2}{k}$ [J] (3) $v_{\max} = g \sqrt{\frac{m}{k}}$ [m/s]