

1 2011年 神戸大学 前期日程

地球を周回する衛星の運動について、問1~4に答えなさい。解答の導出過程も示しなさい。ただし、万有引力定数を G 、地球の質量を M とし、文中に与えられた物理量の他に解答に必要な物理量があれば、それを表す記号はすべて各自で定義し、解答欄に明示しなさい。

問1 図1の破線のように、衛星が半径 R の円軌道上を運動するとき、衛星の加速度の向きと大きさを求めなさい。さらに、そのときの衛星の速さを求めなさい。

運動方程式

$$ma = \frac{GMm}{R^2} \quad (\text{万有引力})$$

$$a = \frac{GM}{R^2}$$

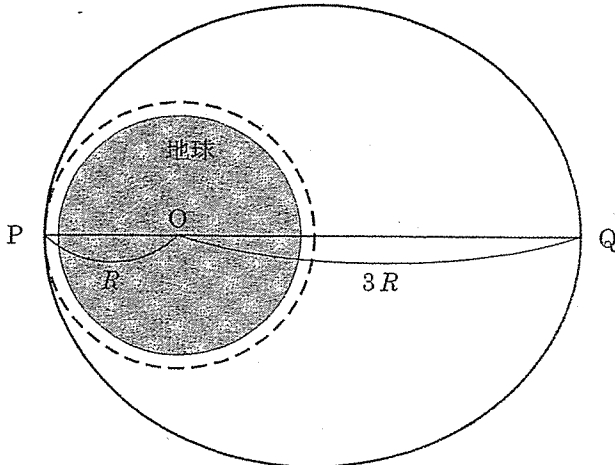
$$\frac{v^2}{R} = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$


図1

問2 問1の状態から衛星を進行方向に加速すると、衛星は楕円軌道に沿って周回するか、無限遠方に飛び去る。衛星が周回運動するための、加速直後の速さに対する条件を求めなさい。

無限遠方に飛び去る最小の速さを v_2 とし、力学的エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2} m \cdot 0^2 + \frac{GMm}{r} \rightarrow \infty$$

$$\Leftrightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

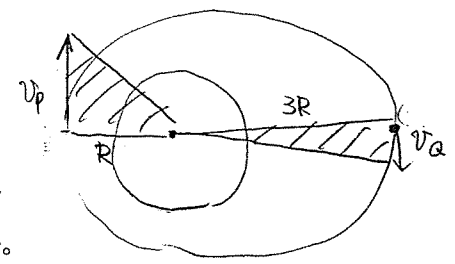
周回するためには、
 $v < v_2$ が必要
 $v < \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

問3 衛星が周回運動しているとき、その面積速度は一定である。衛星が図1のような楕円軌道を描いているとき、地球に最も近い点Pと地球から最も離れた点Qにおける衛星の速さの比を求めなさい。ただし、地球の中心をOとしたとき、 $|OP|=R$ 、 $|OQ|=3R$ とする。

面積速度の第2法則より、

$$\frac{1}{2} v_p R = \frac{1}{2} v_q \cdot 3R$$

$$v_p = 3v_q \quad \text{より} \quad v_p : v_q = 3 : 1$$



問4 問3において、点Pにおける衛星の速さを求めなさい。

P, Q点での力学的エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{3} v_p\right)^2 - \frac{GMm}{3R}$$

$$\frac{8}{9} v_p^2 = \frac{4}{3} \frac{GM}{R}$$

$$v_p = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{GM}{R}}$$

答 問1 向き...中心Oの向き 大きさ... $\frac{GM}{R^2}$ 速さ... $\sqrt{\frac{GM}{R}}$ 問2 $v < \sqrt{\frac{2GM}{R}}$
 問3 Pの速さ: Qの速さ = 3:1 問4 $\sqrt{\frac{3GM}{2R}}$