2 2008年　金沢大学　前期日程

図2のように，半径r[m]の円軌道上を，質量$2m$ [kg]の衛星が一定の速さv_0 [m/s]でまわっている。天体の質量をM[kg]，万有引力定数をG[N・m²/kg²]とする。

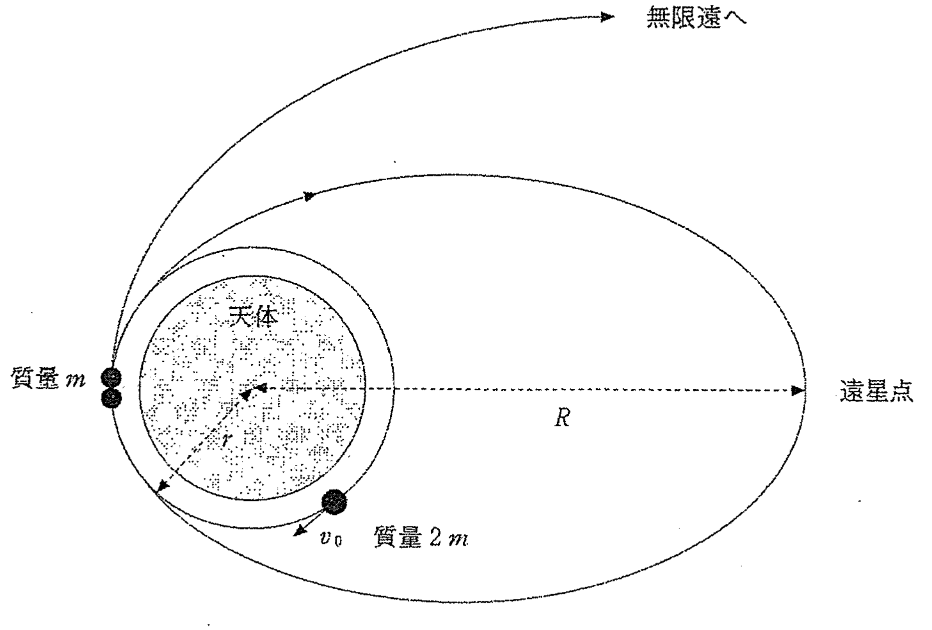


図2

(1)　v_0の大きさをr，G，Mを用いて求めよ。

$$m\frac{v_0^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$ //

(2)　衛星の周期をr，G，Mを用いて求めよ。

$$T = \frac{2\pi r}{v_0} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}}$$ //

図2のように，衛星を質量が等しい2つの衛星aと衛星bに瞬間的に分離させた。分離の前後で衛星の運動方向に変化はなく，衛星aは加速し衛星bは減速したとする。分離直後の衛星aと衛星bの相対速度の大きさをv[m/s]とする。

(3)　分離直後の衛星aと衛星bの速さv_a [m/s]とv_b [m/s]を運動量保存則より，vとv_0を用いて求めよ。

運動量保存則より。

$$2mv_0 = mv_a + mv_b$$

相対速度は v なので

$$\Leftrightarrow 2v_0 = v_a + v_b \quad -①$$

$$\longrightarrow v = v_a - v_b \quad -②$$

①−②

$$2v_0 - v = 2v_b$$

$$v_b = \frac{2v_0 - v}{2} \text{ [m/s]} \quad -③,$$

①+②

$$v_a = \frac{2v_0 + v}{2} \text{ [m/s]} \quad -④$$

(4)　分離にはエネルギーが必要である。必要なエネルギーをmとvを用いて求めよ。

力学的エネルギーの変化に注目すると，

はじめ $K_1 = \frac{1}{2}\cdot 2m\cdot v_0^2 = mv_0^2$

$$K_2 = \frac{1}{2}\cdot m\cdot\left(\frac{2v_0 - v}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{2v_0+v}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}m\frac{1}{4}\left(4v_0^2 + v^2\right)\times 2 = mv_0^2 + \frac{1}{4}mv^2$$

(5)　分離直後の相対速度が大きすぎると衛星aは無限遠に飛び去ってしまう。衛星aが無限遠に飛び出す最小の相対速度の大きさvをv_0だけを用いて求めよ。

1 問2参照

最小のv_aをv_a'として，力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_a'^2 - \frac{GMm}{r} = 0 + 0$$

$$v_a' = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{2}v_0$$

④より

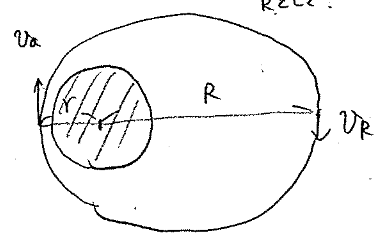
$$\sqrt{2}v_0 = \frac{2v_0 + v}{2}$$

$$v = 2(\sqrt{2} - 1)v_0$$ //

(6)　衛星aと衛星bの相対速度の大きさが問(5)の条件より小さいとき，衛星aの軌道は遠星点がR[m]の楕円軌道となる。ケプラーの第二法則より遠星点での速さをR，r，v_aを用いて求めよ。

v_Rとして．

面積速度一定より，図のように考えて



$$\frac{1}{2}rv_a = \frac{1}{2}Rv_R$$

$$v_R = \frac{r}{R}v_a$$ //

答 (1) $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ [m/s]　(2) $2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}}$ [s]　(3) $v_a = \frac{2v_0+v}{2}$ [m/s]、$v_b = \frac{2v_0 - v}{2}$ [m/s]

(4) $\frac{1}{4}mv^2$ [J]　(5) $v = 2(\sqrt{2}-1)v_0$ [m/s]　(6) $\frac{r}{R}v_a$ [m/s]