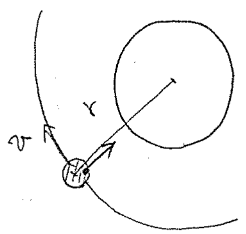
2011、大阪大学、後期

問1

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$



問2

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}}$$

問3

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

$$= \frac{1}{2}m\frac{GM}{r} - \frac{GMm}{r}$$

$$= -\frac{GMm}{2r}$$

問4

$$\frac{E_F}{E} = \frac{-\frac{GMm}{2r_F}}{-\frac{GMm}{2r}} = \frac{r}{r_F}$$

よって、

$$\frac{r_F}{r} = \frac{E}{E_F} = \frac{E}{E-0.04|E|}$$

E < 0 より、

$$= \frac{E}{E-0.04E} = \frac{1}{1.04}$$

$$= 0.96$$

問5

$$\frac{v_F}{v} = \frac{\sqrt{\frac{GM}{r_F}}}{\sqrt{\frac{GM}{r}}} = \sqrt{\frac{r}{r_F}} = \sqrt{1.04} = ?$$

$$= \sqrt{(1+0.04)}^{-1}$$

$$= (1+0.04)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\fallingdotseq \left(1+\frac{1}{2}0.04\right) = 1+0.02$$

$$1.02$$

問6

第3法則より、$\frac{a^3}{T^2} = $ 一定

$$\frac{r_P^3}{T_1^2} = \frac{\left(\frac{r_Q+r_P}{2}\right)^3}{T_2^2}$$

よって、

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[\frac{(r_Q+r_P)^3}{2^3r_P^3}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{r_Q+r_P}{2r_P}\right)^{\frac{3}{2}}$$

問7 ケプラーの第2法則より、

$$\frac{1}{2}v_Pr_P = \frac{1}{2}v_Qr_Q \quad -①$$

力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{GMm}{r_P} = \frac{1}{2}mv_Q^2 - \frac{GMm}{r_Q} \quad -②$$

①より

$$\frac{1}{r_Q} = \frac{v_Q}{v_Pr_P}$$

②$\div\frac{m}{2}$に代入し、

$$v_P^2 - \frac{2GM}{r_P} = v_Q^2 - \frac{2v_QGM}{v_Pr_P}$$

$$v_P^2 - v_Q^2 = \frac{2GM}{r_Pv_P}(v_P - v_Q)$$

$v_P \neq v_Q$ $(v_P+v_Q)(v_P-v_Q)$

$$\Leftrightarrow v_P + v_Q = \frac{2GM}{r_Pv_P} \Leftrightarrow v_Q = \frac{2GM}{r_Pv_P} - v_P$$

①より

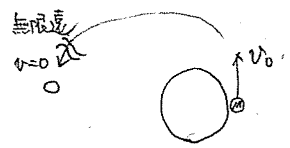
$$r_Q = \frac{v_Pr_P}{v_Q}$$

$$= \frac{v_Pr_P}{v_P\left(\frac{2GM}{r_Pv_P^2} - 1\right)}$$

$$= \frac{r_P^2v_P^2}{2GM - r_Pv_P^2}$$

問8 力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_P} = \underset{v=0}{0} - \underset{r\to\infty}{0}$$



$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r_P}} \quad -③$$

問9 の方針

1、無限遠点での速さv_∞を求める

2、面積速度一定を考える.

1. について、力学的エネルギー保存則より.

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{5}{4}v_0\right)^2 - G\frac{Mm}{r_P} = \underset{無限遠}{\frac{1}{2}mv_\infty^2} - \underset{r\to\infty}{0}$$

$$v_\infty^2 = \left(\frac{5}{4}v_0\right)^2 - \underbrace{\frac{2GM}{r_P}}_{③より} = \frac{25}{16}v_0^2 - v_0^2 = \frac{9}{16}v_0^2$$

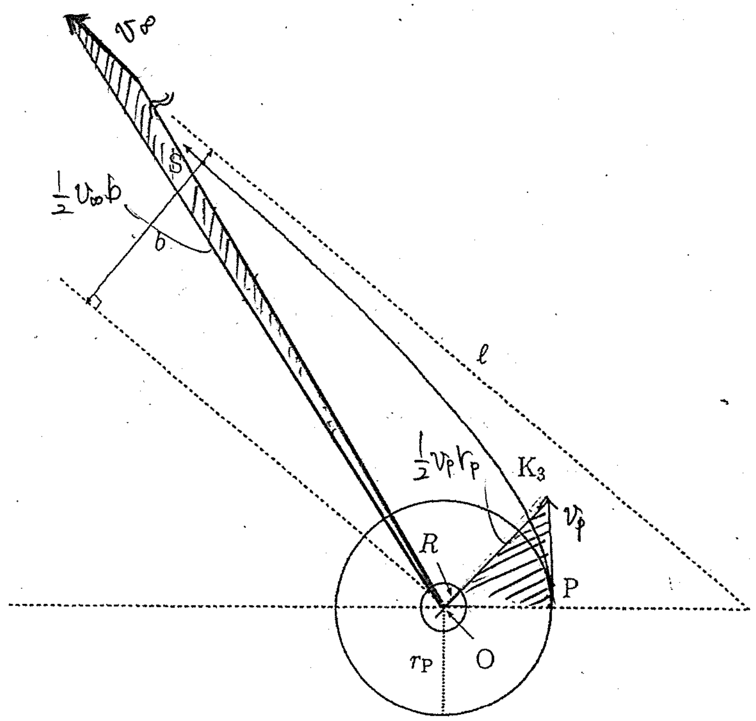
よって、

$$v_\infty = \frac{3}{4}v_0$$

2、について 図のように、面積速度をとらえ.

$$\frac{1}{2}v_\infty b = \frac{1}{2}v_Pr_P$$

$$b = \frac{\frac{5}{4}v_0}{\frac{3}{4}v_0}r_P = \frac{5}{3}r_P$$



3 2011年 大阪大学 後期日程

質量mの人工衛星Sの，地球のまわりの運動を考える。ただし，地球の質量をM，半径をRとする。また，万有引力定数をGとする。

Ⅰ．人工衛星Sが，地球の中心O点のまわりを，速さvで半径$r(r>R)$の等速円運動をしている。ただし，地球は十分重く動かないものとし，他の天体の影響は無視できるものとする。また，問4と問5を除き，大気の影響は無視してよい。

問1 人工衛星Sの速さvを求めよ。

問2 この円運動の周期Tを求めよ。ただし，答はvを用いずに表せ。

次に，人工衛星Sの力学的エネルギー(位置エネルギーと運動エネルギーの和)について考察する。ただし，位置エネルギーは，無限遠を基準とする。

問3 人工衛星Sの力学的エネルギーを，G，M，m，r，Rのうち必要なものを用いて表せ。

これまで，地球のまわりの大気の存在を無視してきたが，ここで，その影響を考えてみよう。大気の影響は非常に小さいので，軌道の変化は極めてゆっくりであり，十分短い時間に限れば，人工衛星Sの運動は等速円運動と見なせる。初め，速さvで半径rの等速円運動をしていた人工衛星Sが，数年の間に大気の抵抗力のために，力学的エネルギーを4%だけ失い，速さv_Fで半径r_Fの円運動をするようになった。すなわち，初めの円軌道を運動している人工衛星Sの力学的エネルギーEと，エネルギーを少し失った後の人工衛星Sの力学的エネルギーE_Fの間に，$E_F-E=-0.04|E|$なる関係が成り立っていた。

問4 $\dfrac{r_F}{r}$を有効数字2桁まで求めよ。

問5 エネルギーを失う前後の速さの比，すなわち，$\dfrac{v_F}{v}$を小数点以下2桁まで求めよ。ただし，$|x|<<1$のときに成り立つ近似式$\sqrt{1+x}\fallingdotseq 1+\dfrac{1}{2}x$を用いてよい。

Ⅱ．

ケプラーは，ティコ・ブラーエが残した太陽系の運動に関する膨大な観測データを解析して，次のケプラーの法則を発見した。(図1を参照せよ。)

第1法則：惑星は，太陽を焦点の一つとする楕円軌道を描く。

第2法則：惑星が太陽のまわりに描く面積速度(惑星と太陽を結ぶ線分が単位時間に通過する面積)は常に一定である。

第3法則：惑星の公転周期の2乗は，楕円軌道の長半径の3乗に比例する。

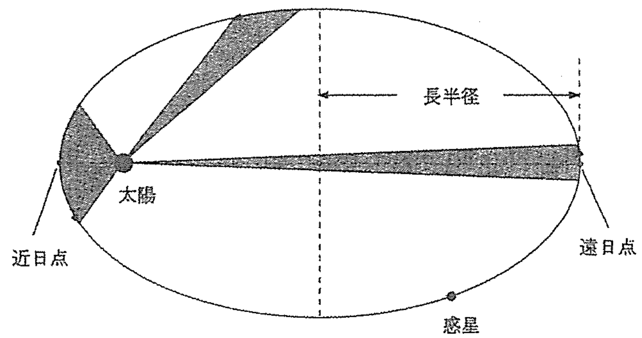


図1

ケプラーの第2法則は，無限のかなたから太陽に近づいてきて，双曲線や放物線を描いて再び無限のかなたに飛び去っていくような彗星(すいせい)の運動に対しても成り立つことが知られている。また，ケプラーの法則は，ニュートンの万有引力の法則で説明され，太陽を地球，惑星を人工衛星と置き換えても成り立つ。

再び人工衛星の問題を考えよう。以下では，他の天体の影響および地球のまわりの大気の影響は無視できるものとする。半径$r_P\ (r_P>R)$の円軌道上を運動していた人工衛星Sが図2の軌道K_1のP点に来たときに，軌道に沿って瞬間的に加速され，速さv_Pになった。それ以後，人工衛星Sは，地球の中心O点を焦点の一つとし，P点を近地点，Q点を遠地点(ただし，$\overline{OQ}=r_Q\ (r_Q>r_P)$)とする楕円軌道(図2の軌道$K_2$)を描いた。

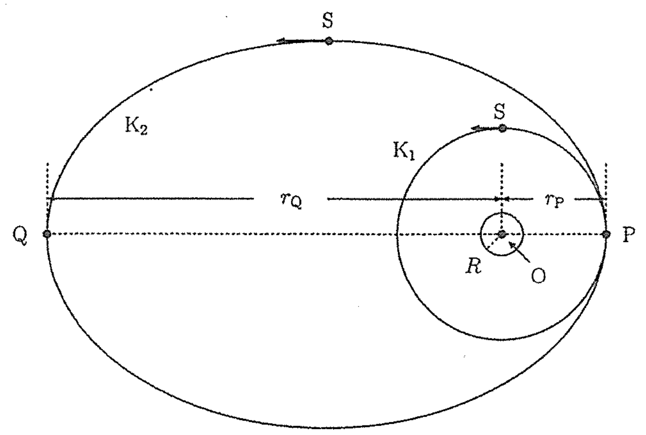


図２

問６　この楕円軌道の周期T_2と，元の円軌道の周期T_1の比$\dfrac{T_2}{T_1}$を，r_Pとr_Qを用いて表せ。

問７　ケプラーの法則と，力学的エネルギーの保存則に注意して，軌道K_2上のQ点に来たときの人工衛星Sの速さv_Q，および，OQ間の距離r_Qを，r_P，v_P，G，M，mのうち必要なものを用いて表せ。

次に，人工衛星Sが再びP点に来たとき，軌道に沿って瞬間的に加速され，v_Pよりもさらに大きな速さv_P'になった。

問８　地球の引力を振り切って無限のかなたに飛び去ることができるv_P'の最小値v_0を求めよ。

v_P'が，問８で求めた最小値v_0のk倍(ただし，$k>1$とする)だったとき，人工衛星Sは，図３のように，ある直線ℓに限りなく近づく双曲線軌道K_3を描いた。ただし，O点と直線ℓの距離を$b(b>r_P)$とする。

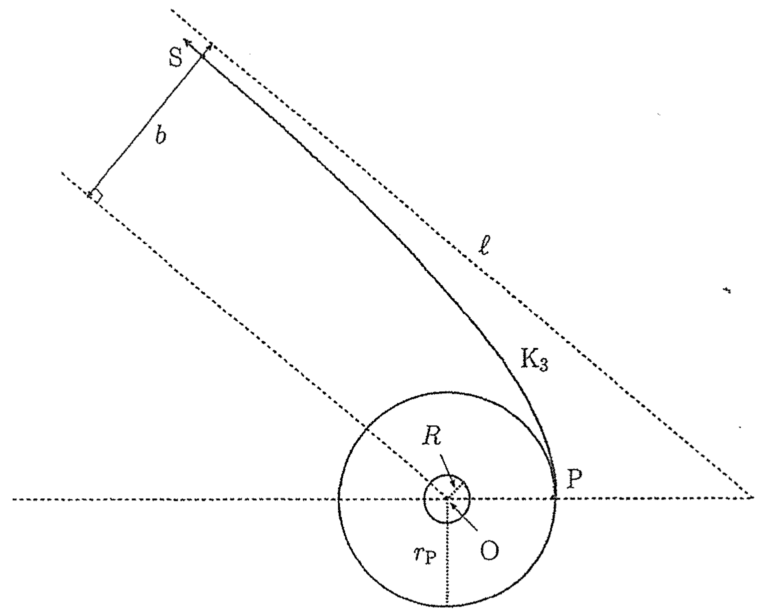


図３

問９　$k=\dfrac{5}{4}$のとき，距離bを，G，M，m，r_Pのうち必要なものを用いて表せ。

答Ⅰ．問１　$v=\sqrt{\dfrac{GM}{r}}$　問２　$T=2\pi\sqrt{\dfrac{r^3}{GM}}$　問３　$-\dfrac{1}{2}G\dfrac{Mm}{r}$　問４　$\dfrac{r_F}{r}=0.96$　問５　$\dfrac{v_F}{v}=1.02$

Ⅱ．問６　$\dfrac{T_2}{T_1}=\left(\dfrac{r_P+r_Q}{2r_P}\right)^{\frac{3}{2}}$　問７　$v_Q=\left(\dfrac{2GM}{r_P{v_P}^2}-1\right)v_P$，$r_Q=\dfrac{r_P}{\dfrac{2GM}{r_P{v_P}^2}-1}$　問８　$v_0=\sqrt{\dfrac{2GM}{r_P}}$

問９　$b=\dfrac{5}{3}r_P$