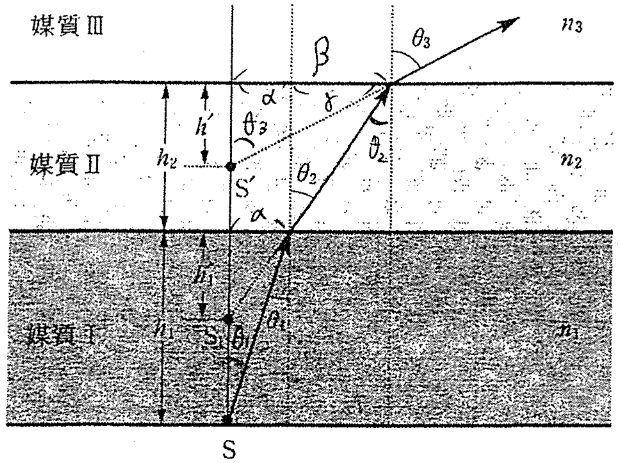
1 2006年　長崎大学 前期日程

図において，媒質Ⅰ，媒質Ⅱ，媒質Ⅲは屈折率がそれぞれn_1，n_2，n_3の媒質である。また，媒質Ⅰと媒質Ⅱの厚さはh_1とh_2である。媒質Ⅰの底に点光源Sを置く。Sを出て媒質Ⅰから媒質Ⅱを通り媒質Ⅲへ進む光線がある。図のように，媒質Ⅰでの入射角をθ_1，媒質Ⅱでの屈折角をθ_2，媒質Ⅲでの屈折角をθ_3とする。ただし，各媒質の境界面はすべて平行であり，$n_1 > n_2 > n_3$とする。



（あ）　θ_1，θ_2，n_1，n_2の間に成り立つ関係式を示せ。

屈折の法則より

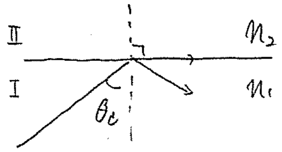
$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{n_1}{n_2} \Leftrightarrow n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2 \quad \text{—①}$$

（い）　この光線の媒質Ⅰでの波長がλ_1であるとき，媒質Ⅱでの波長λ_2をλ_1，n_1，n_2で表せ。

屈折の法則より，

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{n_1}{n_2} \Leftrightarrow \lambda_2 = \frac{n_1}{n_2}\lambda_1$$

（う）　媒質Ⅰと媒質Ⅱの境界面で全反射を起こすθ_1の最小値θ_cとn_1，n_2との関係を求めよ。



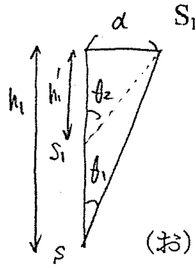
θ_cで入射すると，左図のようになる。

$$\frac{\sin 90^\circ}{\sin\theta_c} = \frac{n_1}{n_2}$$

又は　$n_1\sin\theta_c = n_2\sin 90^\circ$

$$\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{—③}$$

（え）　Sを媒質Ⅱから見たとき，Sは媒質Ⅰと媒質Ⅱの境界面から鉛直方向に距離がh_1'の位置S_1にあるように見えた。このとき，h_1'とh_1，θ_1，θ_2との関係を求めよ。



左図より，

$$\tan\theta_1 = \frac{\alpha}{h_1} \qquad \tan\theta_2 = \frac{\alpha}{h_1'}$$

$$\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1} = \frac{\frac{\alpha}{h_1'}}{\frac{\alpha}{h_1}} = \frac{h_1}{h_1'}$$

$$\Leftrightarrow h_1' = \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}h_1$$

（お）　θ_1，θ_2，θ_3，n_1，n_2，n_3の間に成り立つ関係式を示せ。

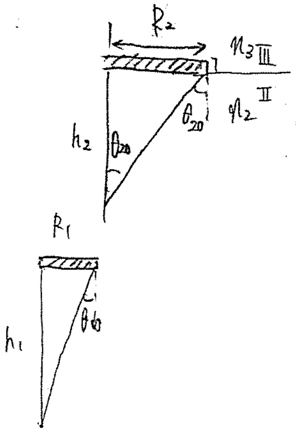
図より，ⅡとⅢの界面で，

$$n_2\sin\theta_2 = n_3\sin\theta_3 \quad \text{—②}$$

①②より，

$$n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2 = n_3\sin\theta_3$$

（か）　媒質Ⅱと媒質Ⅲの境界面上に円板を置き，Sが媒質Ⅲのどこからも見えなくなるようにした。このときの円板の最小半径Rをn_1，n_2，n_3，h_1，h_2で表せ。



ⅡとⅢの界面での臨界角をθ_{20}として，

$$\frac{\sin 90^\circ}{\sin\theta_{20}} = \frac{n_2}{n_3} \Leftrightarrow \sin\theta_{20} = \frac{n_3}{n_2}$$

$$\frac{R_2}{\sqrt{R_2^2+h_2^2}} = \frac{n_3}{n_2}$$

$$n_2^2R_2^2 = n_3^2(R_2^2+h_2^2)$$

$$(n_2^2-n_3^2)R_2^2 = n_3^2h_2^2$$

$$R_2 = \frac{n_3h_2}{\sqrt{n_2^2-n_3^2}}$$

（か）界面ⅠⅡについて

$$\frac{\sin\theta_{20}}{\sin\theta_{10}} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\sin\theta_{10} = \frac{n_2}{n_1}\cdot\frac{n_3}{n_2}$$

$$\frac{R_1}{\sqrt{R_1^2+h_1^2}} = \frac{n_3}{n_1}$$

$$n_1^2R_1^2 = n_3^2R_1^2 + n_3^2h_1^2$$

$$R_1 = \frac{n_3h_1}{\sqrt{n_1^2-n_3^2}}$$

（か）続き

円の半径をRとして，

$$R = R_1 + R_2 = \frac{n_3}{\sqrt{n_1^2-n_3^2}}h_1 + \frac{n_3}{\sqrt{n_2^2-n_3^2}}h_2$$

（き）　円板を取りのぞき，Sを媒質Ⅲから見たとき，Sは媒質Ⅱと媒質Ⅲの境界面から鉛直方向に距離がh'の位置S′にあるように見えた。いま，Sを媒質Ⅲの真上付近から見たとすると，θ_1，θ_2，θ_3は十分小さく，$\tan\theta_i = \sin\theta_i$ ($i = 1, 2, 3$)が成り立つと考えてよい。Sを媒質Ⅲの真上付近から見たとき，h'をn_1，n_2，n_3，h_1，h_2で表せ。

（き）

[方針] h'を求めて，$\theta \to$ 小を考える。

$$\beta = \alpha + \gamma$$

図より，

$$h'\tan\theta_3 = \beta \Leftrightarrow h' = \frac{\beta}{\tan\theta_3} = \frac{1}{\tan\theta_3}(h_1\tan\theta_1 + h_2\tan\theta_2)$$

$\theta_i \to$ 小で，$\tan\theta_i = \sin\theta_i$

$$h' = \frac{1}{\sin\theta_3}(h_1\sin\theta_1 + h_2\sin\theta_2)$$

$$= \left(h_1\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_3} + h_2\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_3}\right) \overset{\text{屈折の法則}}{=} \left(h_1\frac{n_3}{n_1} + h_2\frac{n_3}{n_2}\right)$$

$$\because \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_3} = \frac{\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}}{\frac{\sin\theta_3}{\sin\theta_2}} = \frac{\frac{n_2}{n_1}}{\frac{n_2}{n_3}} = \frac{n_3}{n_1}$$

答（あ）$n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2$　（い）$\dfrac{n_1}{n_2}\lambda_1$　（う）$\sin\theta_c = \dfrac{n_2}{n_1}$　（え）$h_1' = h_1\dfrac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}$

（お）$n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2 = n_3\sin\theta_3$　（か）$\dfrac{n_3}{\sqrt{n_1{}^2-n_3{}^2}}h_1 + \dfrac{n_3}{\sqrt{n_2{}^2-n_3{}^2}}h_2$　（き）$\dfrac{n_3}{n_1}h_1 + \dfrac{n_3}{n_2}h_2$