3 2014年　名古屋大学　前期日程

球面凸レンズの原理を調べよう。まず，図1のように，点Aにレーザー光源を置き，透明な物質でできた半径 R の球体にレーザー光を当てる。物質の屈折率は $n(n>2)$ であり，光の波長によらず一定とする。球体の外部は真空である(屈折率1)。レーザー光は十分に細く，広がらずに進む。球体の中心を点Oとし，直線AOが球表面と交わる点をBとする。レーザー光は，球面上の点Cで屈折し，直線AOと球体内の点Dで交差した。ABの長さを d_1，BDの長さを d_2，点Cの直線AOからの距離を h とする。直線ACと直線OCのなす鋭角を θ_1，$\angle OCD=\theta_2$，$\angle CAB=\alpha$，$\angle COB=\beta$，$\angle CDB=\gamma$ とする。各角度はラジアンで表されている。以下では，h は R に比べて十分に小さいとする。このとき θ_1，θ_2，α，β，γ に対して，微小角度 x に対する近似式 $\sin x \fallingdotseq x$，$\cos x \fallingdotseq 1$ が成り立つものとする。以下の設問に答えよ。計算欄には，答にいたるまでの過程の**要点**(法則，関係式，論理，計算など)を書け。

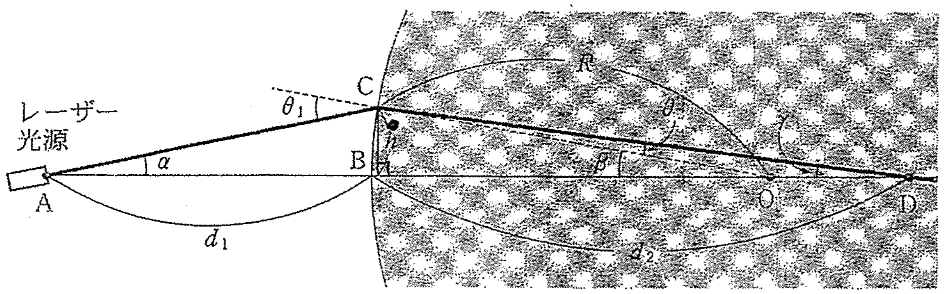
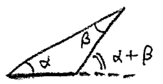


図1

設問(1)：θ_1 と θ_2 の間に成立する関係を，屈折率 n を用いて表せ。

設問(2)：以下の文章中の (ア) ～ (カ)，(ケ) に入る数式を答えよ。(キ)，(ク) では，適切な語句を選べ。



① $\beta+\bullet=90^\circ$　② $\gamma+\theta_2+\bullet=90^\circ$

①,②より $\gamma+\theta_2=\beta \Leftrightarrow \theta_2=\beta-\gamma$.

図1において θ_1，θ_2 を α，β，γ を使って表すと，$\theta_1=$ $\overset{\alpha+\beta}{\boxed{(ア)}}$，$\theta_2=$ (イ) である。設問(1)で求めた関係を用いると，屈折率 n は α，β，γ を使って，$n=$ (ウ) と表すことができる。ACの長さを s_1，CDの長さを s_2 とし，α，β，γ を s_1，s_2，R，h を使って表すと，$\alpha=$ (エ)，$\beta=$ (オ)，$\gamma=$ (カ) である。これらを $n=$ (ウ) に代入すると，$s_2=\dfrac{nR}{(n-1)-\dfrac{R}{s_1}}$ が得られる。微小角度に対する近似式を用いると，$d_1 \fallingdotseq s_1$，$d_2 \fallingdotseq s_2$ であり，$d_2=\dfrac{nR}{(n-1)-\dfrac{R}{d_1}}$ となる。

距離 d_1 を一定に保ちつつレーザー光源の方向を変えて h を大きくすると，d_2 は (キ) 大きくなる，小さくなる，変化しない。h を変えずに距離 d_1 を大きくすると，d_2 は (ク) 大きくなる，小さくなる，変化しない。

一方，レーザー光源を球体に近づけて $d_1<\dfrac{R}{n-1}$ とすると，レーザー光は図1のようには進まず，図2のように A→C→E と進む。直線CEは直線AOと球体の外の点Dで交差する。このとき，屈折率 n を図2の α，β，γ を使って表すと $n=$ (ケ) であり，BDの長さは $d_2=-\dfrac{nR}{(n-1)-\dfrac{R}{d_1}}$ となる。

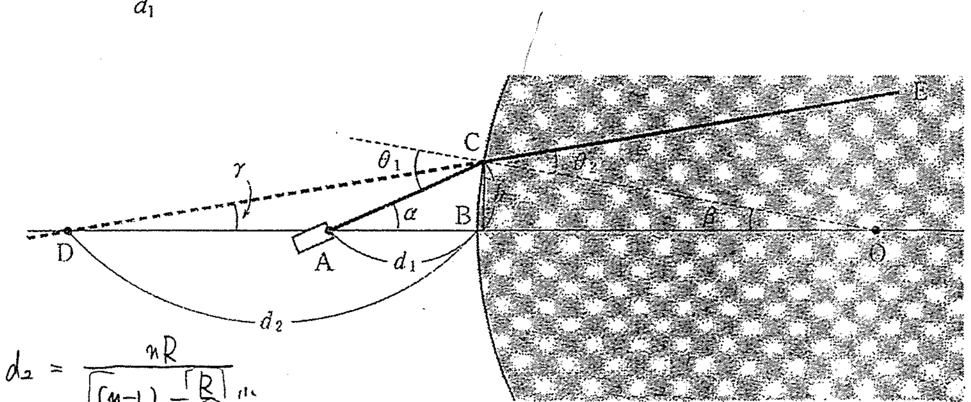


図2

$$d_2=\frac{nR}{\boxed{(n-1)-\dfrac{R}{d_1}}}$$

小　大　大

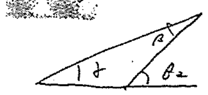
d_2 は，d_1 に依存し，d_1 大で，d_2 小

(キ) … h にはよらない ⇒ 変化しない

(ク) … 小さくなる．

図より，$\theta_1=\alpha+\beta$

$\theta_2=\beta+\gamma$ であるから．



屈折の法則

$1\cdot\sin\theta_1=n\cdot\sin\theta_2$ より．

$$n=\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{\theta_1}{\theta_2}=\frac{\alpha+\beta}{\beta+\gamma}$$

屈折の法則より

(ウ) $1\cdot\sin\theta_1=n\sin\theta_2$

$$n=\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\fallingdotseq\frac{\theta_1}{\theta_2}=\frac{\alpha+\beta}{\beta-\gamma}$$

(エ) $\alpha\fallingdotseq\sin\alpha=\dfrac{h}{s_1}$　$\gamma\fallingdotseq\sin\gamma=\dfrac{h}{s_2}$

$\beta\fallingdotseq\sin\beta=\dfrac{h}{R}$

$$n=\frac{\dfrac{h}{s_1}+\dfrac{h}{R}}{\dfrac{h}{R}-\dfrac{h}{s_2}}=\frac{s_1+R}{s_1\cancel{R}}\cdot\frac{s_2\cancel{R}}{s_2-R}$$

$As_2-AR=s_2$

$$\underbrace{n\left(\frac{s_1}{s_1+R}\right)}_{A}\cdot(s_2-R)=s_2\qquad(A-1)s_2=AR$$

$$s_2=\frac{AR}{(A-1)}=\frac{\dfrac{ns_1}{s_1+R}\cdot R}{\left(\dfrac{ns_1-s_1-R}{s_1+R}\right)}$$

$$=\frac{ns_1R}{ns_1-s_1-R}=\frac{nR}{(n-1)-\dfrac{R}{s_1}}$$

次に図3のように，球体と同じ物質の凸レンズを用意する。レンズの光軸は直線BCであり，光軸上の点Aにレーザー光源を置く。点B，点Cを含むレンズの表面はそれぞれ点O_2，点O_1を中心とする半径Rの球面である。レーザー光は，レンズ表面上の点E，点Fを通り，光軸と点Dで交差した。ABの長さをl_1，CDの長さをl_2とする。レンズの厚みBCは十分に薄く，l_1やl_2に対して無視することができる。∠EABと∠FDCは微小角であるとする。

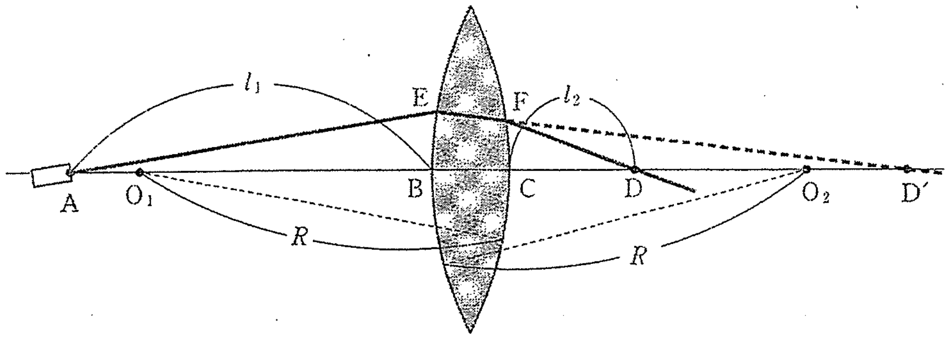


図3

設問(3)：点Fでの屈折を考えなければ，レーザー光は光軸と点D′で交差する。l_1とBD′の長さには，設問(2)で導出した関係式が成立する。続いて点Fでの屈折を考えると，レーザー光はE→F→Dと進む。一方，点Dにレーザー光源を置き，点Fにレーザー光を照射すると，レーザー光はD→F→Eと進む。これは図2の状況に対応し，l_2とCD′の長さには，設問(2)で導出した関係式が成立する。$\dfrac{1}{l_1}+\dfrac{1}{l_2}$を$n$，$R$を用いて表せ。

図3の凸レンズの屈折率を$n=2.6$とし，$R=70$ cmとする。

設問(4)：レンズの焦点距離fを，有効数字2桁で求めよ。

設問(5)：レーザー光源を取り除き，レンズより十分に小さい物体を点Aに置く。物体に照明をあてて，レンズをはさんで物体の反対側に置いたスクリーンにはっきりとした像を映す。像の拡大率を10倍にするための距離l_1を有効数字2桁で求めよ。

$$d_2 = \frac{nR}{(n-1)-\frac{R}{d_1}} \text{ より．}$$

(3) (2)前半の話の中の．$d_1 \Leftrightarrow l_1$　$d_2 \Leftrightarrow$ BD′に対応するので，$BD' = \dfrac{nR}{(n-1)-\frac{R}{l_1}}$

(2)後半の話の中の，$d_1 \Leftrightarrow l_2$　$d_2 \Leftrightarrow$ CD′に対応するので，$CD' = -\dfrac{nR}{(n-1)-\frac{R}{l_2}}$

レンズが，うすいときには，$BD' = CD'$ だから，

$$\frac{nR}{(n-1)-\frac{R}{l_1}} = -\frac{nR}{(n-1)-\frac{R}{l_2}}$$

$$\Leftrightarrow (n-1)-\frac{R}{l_2} = -(n-1)+\frac{R}{l_1}$$

$$\frac{R}{l_1}+\frac{R}{l_2} = 2(n-1)$$

$$\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2} = \frac{2(n-1)}{R} \quad \text{―①}$$

(4) Dで結像するので，写像公式より，

$$\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2} = \frac{1}{f} \quad \text{―②} \text{ である．}$$

①，② より，

$$\frac{1}{f} = \frac{2(n-1)}{R}$$

$$f = \frac{R}{2(n-1)} = \frac{0.7}{2(2.6-1)} = \frac{0.7}{3.2}$$

$$= 0.21875 \qquad \underline{22(\text{cm})}$$

(5) $\dfrac{l_2}{l_1} \overset{\text{倍率}}{=} 10 \Leftrightarrow l_2 = 10l_1$ として写像公式を用い，

$$\frac{1}{l_1}+\frac{1}{10l_1} = \frac{R}{2(n-1)}$$

$$\frac{10}{11}l_1 = \frac{2(n-1)}{R}$$

$$l_1 = \frac{11}{10} \times 0.21875 = 0.240\ldots \qquad \underline{24(\text{cm})}$$

答　設問(1) $n=\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$　設問(2)　(ｱ) $\alpha+\beta$　(ｲ) $\beta-\gamma$　(ｳ) $\dfrac{\alpha+\beta}{\beta-\gamma}$　(ｴ) $\dfrac{h}{s_1}$　(ｵ) $\dfrac{h}{R}$　(ｶ) $\dfrac{h}{s_2}$

(ｷ)変化しない　(ｸ)小さくなる　(ｹ) $\dfrac{\alpha+\beta}{\beta+\gamma}$

設問(3) $\dfrac{1}{l_1}+\dfrac{1}{l_2}=\dfrac{2(n-1)}{R}$　設問(4) $f=22$ [cm]　設問(5) $l_1=24$ [cm]