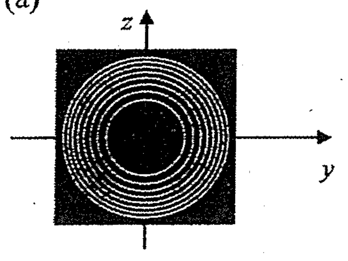
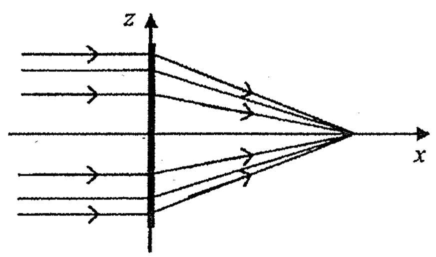
3 2014年　東京大学　前期日程

図 3－1(a)のように yz 平面上に設置した等間隔ではない多数の同心円状の細いスリットを用いると，x 軸に平行に入射した光の回折光を図 3－1(b)のように集めて収束させることができる。以下では問題を簡単にするため，同心円状のスリットを図 3－1(c)に示すような直線状の細い平行なスリットで置き換えて，その原理を考えよう。以下の設問に答えよ。

(a)



(b)



(x 軸は紙面裏から表の方向)

(c)

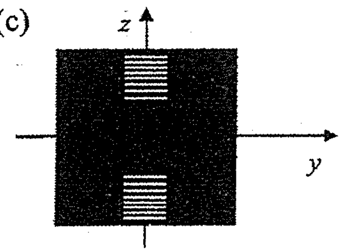
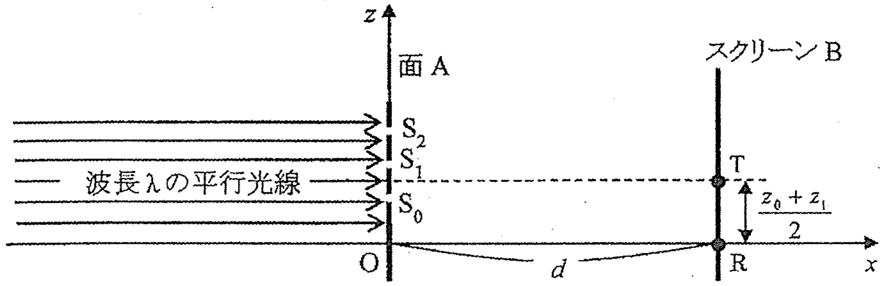


図 3－1

図 3－2 に示すように，x 軸上の原点 O を通り x 軸に垂直な面 A と，面 A から距離 d だけ離れたスクリーン B を考える。y 方向(紙面に垂直)に伸びた細いスリット S_0, S_1, S_2, … を面 A 上の $z=z_0$, z_1, z_2, …$(0<z_0<z_1<z_2\cdots)$ の位置に配置する。波長 λ の光が，面 A の左側から x 軸に平行に入射し，スリットを通過してスクリーン B に到達する。まず，スリット S_0，S_1 のみを残し，他のスリットを全てふさいだところ，スクリーン B 上に干渉縞が生じた。

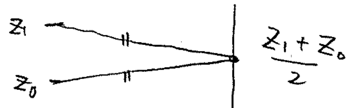


(y 軸は紙面表から裏の方向)

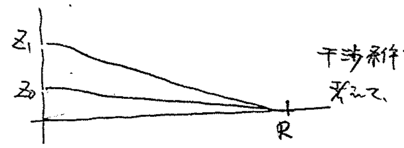
図 3－2

(1) スクリーン B 上で $z=\dfrac{z_0+z_1}{2}$ の位置 T にできるのは明線であるか暗線であるか。また，その理由を簡潔に述べよ。

明線である。　S_0 と S_1 で同位相であり，点Tは S_0 と，S_1 からの光路差が0だから。



(2) スクリーン B 上で，この位置 T より下方(z のより小さい方)に最初に現れる明線を，スリット S_0，S_1 に対する 1 次の回折光と呼ぶ。1 次の回折光が，$z=0$ の位置 R にあった。z_0，z_1 は d より十分に小さいものとして，d を λ，z_0，z_1 を用いて表せ。必要ならば，近似式 $\sqrt{1+\delta}\fallingdotseq 1+\dfrac{1}{2}\delta$，($|\delta|$ は 1 より十分に小さいものとする)を用いてよい。



$S_1R=\sqrt{d^2+z_1^2}\fallingdotseq d\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{z_1}{d}\right)^2\right)$ －①

干渉条件で考えて，$S_0R=\sqrt{d^2+z_0^2}\fallingdotseq d\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{z_0}{d}\right)^2\right)$ －②

$S_1R-S_0R\overset{①②より}{=}\frac{1}{2d}\left(z_1^2-z_0^2\right)=1\cdot\lambda$ －③

よって，$d=\dfrac{z_1^2-z_0^2}{2\lambda}$ －③′

次に，$z>0$ の領域にある合計 N 本の多数のスリットすべてを用いる場合を考える。すべての隣りあうスリットの組 S_n と S_{n+1} $(n=0, 1, 2, \cdots)$ について，それらの 1 次の回折光が R に現れるためには，その方向が n とともに少しずつ変わるようにスリットを配置する必要がある。このように面 A に N 本のスリットを設置したところ，R に鮮明な明線が現れた。

(3) このとき n 番目のスリットの位置 z_n は n のどのような関数になっているか。z_n を z_0, n, d, λ を用いて表せ。

③′より，$d=\dfrac{z_{n+1}^2-z_n^2}{2\lambda}$

$z_n^2=Y_n$ として，$n=0,1,2\cdots$

$Y_{n+1}=Y_n+2d\lambda$

Y_n は初項 z_0^2 ($n=0$)，公差 $2d\lambda$ の等差数列

$Y_n=n\cdot 2d\lambda+z_0^2$　$n=0,1,2\cdots$

$z_n=\sqrt{Y_n}=\sqrt{z_0^2+2d\lambda n}$ －④

(4) スクリーン B を x 軸に沿って左右に動かすと，他にも $z=0$ に明線が現れる位置があった。それらの x 座標を R に近い順に 2 つ答えよ。

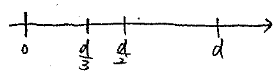
強め合う位置を d' とする。

このとき，③より，$m=2,3\cdots$

$\dfrac{1}{2d'}\left(z_{n+1}^2-z_n^2\right)=m\lambda$ であれば $z=0$ で強め合う。

④より，$\dfrac{1}{2d'}\left(2d\lambda\right)=m\lambda$

$d'=\dfrac{d}{m}$



よって，近い順に，

$\dfrac{d}{2}$，$\dfrac{d}{3}$

(5) 左側から平行光線を入射する代わりに，図 3−3 に示すように x 軸上の原点 O から距離 a の点 P に波長 λ の点光源を置き，スクリーン B を x 軸に沿って左右に動かすと，$z=0$ に明線が現れる位置 R′ があった。その x 座標 b を，λ を含まない式で表せ。ただし，$z=z_0, z_1, z_2, \cdots$ は a，b より十分に小さく，$a>d$ かつ $b>d$ であるとする。

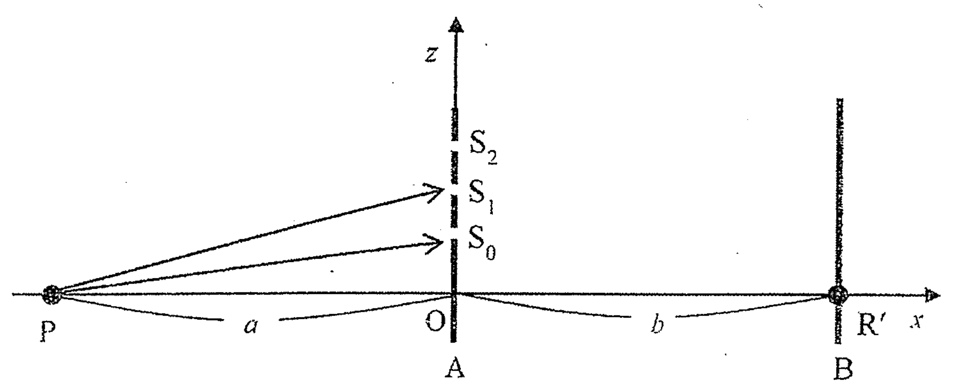


図 3−3

(6) 図 3−4 は，設問(5)の状況において，R′ 近傍に現れる明線の光の強度分布を z の関数として示したものである。ただし，光の強度とは単位時間あたりに単位面積に到達する光のエネルギーである。図 3−1(c)のように，$z<0$ の領域にも $z>0$ の領域と対称にスリットを配置して，スリットの総数を 2 倍にした。このとき，明線の強度や幅が変化した。以下の文中の $\boxed{}$ 内に入るべき適当な整数もしくは分数を答えよ。

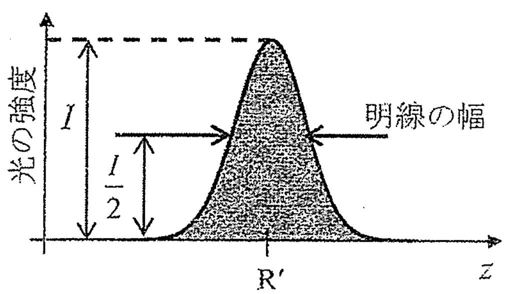


図 3−4

スリットの総数が 2 倍になったので，点 R′ における光の波(電磁波)の振幅は $\boxed{ア}$ 倍になる。光の強度は光の波の振幅の 2 乗に比例することが知られているので，点 R′ での光の強度は $\boxed{ア}$ の 2 乗倍になる。一方，明線内に単位時間に到達する光のエネルギーは $\boxed{イ}$ 倍になるはずである。このことから，スリット数を 2 倍に増やすと明線の z 方向の幅は，約 $\boxed{ウ}$ 倍となると考えられる。

このとき、

S_m と S_{m+1} を通る光について検討すると、

左側 $PS_m = \sqrt{a^2+z_m^2} \fallingdotseq a\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{z_m}{a}\right)^2\right)$

$PS_{m+1} = \sqrt{a+z_{m+1}^2} \fallingdotseq a\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{z_{m+1}}{a}\right)^2\right)$

右側 $S_mR' = b\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{z_m}{b}\right)^2\right)$

$S_{m+1}R' = b\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{z_{m+1}}{b}\right)^2\right)$

R′で、強めあうとすると、

(2)より　強め合う

$PS_{m+1}R' - PS_mR' = \frac{z_{m+1}^2-z_m^2}{2a} + \frac{z_{m+1}^2-z_n^2}{2b} = \left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\right)(2d\lambda) = m\lambda$

よって、$\frac{(b+a)\cdot 2d}{2ab} = m \iff 2db+2da = 2abm$

$\iff b(d-am) = -da \iff b = \frac{da}{am-d}$

$= \frac{da}{a-d}$

なぜなら ∵ $m=1$

$b>d$ より、

$\iff \frac{da}{am-d} > d$

$\iff a > am-d$

$\iff a(m-1) < d$

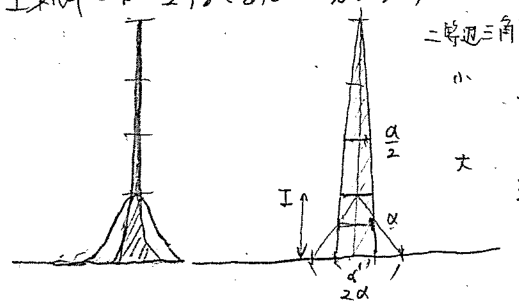
$\iff (m-1) < \frac{d}{a} < 1$

$0<m$ なので、$m=1$ である。

(ア) 波の重ね合わせを考えると、2倍になる。

(イ) スリットが2倍になれば、エネルギーも2倍になる。

(ウ) エネルギーが2倍である一方、強度は4倍になるので、



二等辺三角形でイメージ　強度　エネルギー　$\frac{I}{2} \propto$ 幅

小　$\frac{1}{2}\times 2\alpha\times I = \alpha I$　⇒　α

大　$\frac{1}{2}\cdot\alpha'\times 4I = 2\alpha I$ として　⇒　$\frac{\alpha}{2}$

$\alpha' = \alpha$

よって、$\frac{1}{2}$ 倍。

答(1)明線　理由…入射する波長 λ の平行光線はスリット S_0，S_1 で同位相であり，それぞれのスリットから T までの経路差が 0 で強め合うから。

(2) $d=\frac{z_1^2-z_0^2}{2\lambda}$　(3) $z_n=\sqrt{z_0^2+2d\lambda n}$　(4) $x=\frac{d}{2}, \frac{d}{3}$　(5) $b=\frac{ad}{a-d}$　(6)ア　2　イ　2　ウ　$\frac{1}{2}$