

13-3 単原子分子理想気体がある状態から様々な状態を経て元の状態に戻した結果、気体が外部に仕事をする熱機関について考えよう。ここでは、気体を閉じ込める容器の強度に制限があるために、気体の圧力の最大値が決まっているとする。この制限の下で設計された二つの熱機関aとbについて、性能の指標となる熱効率を求め、その大小を比較したい。

以下の文中で、「気体が外部から熱量(熱) Q を吸収する」というとき、 Q は符号を含めて定義されている。つまり、 $Q > 0$ ならば気体は外部から熱量 Q を吸収し、 $Q < 0$ であれば気体は外部へ熱量 $|Q|$ を放出するという意味である。同様に、「気体が外部にする仕事 W である」というときも、 W は符号を含めて定義されており、 $W > 0$ ならば気体が外部にする仕事 W 、 $W < 0$ ならば気体が外部からされる仕事 $|W|$ という意味である。また、単原子分子理想気体の圧力を p 、体積を V としたとき、断熱変化において $pV^{5/3}$ の値が一定に保たれることを用いてよい。

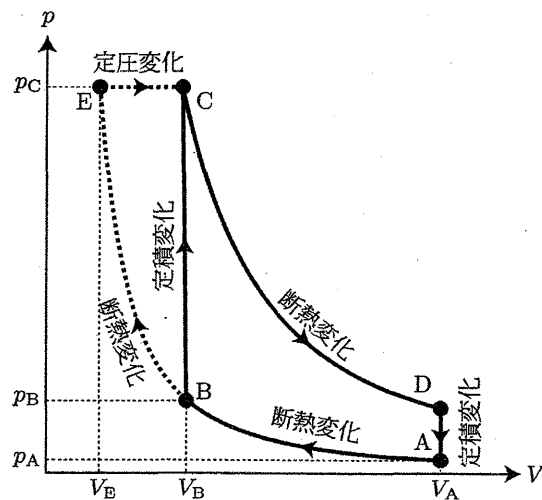


図1

I. 圧力 p と体積 V で指定される気体の状態を、図1において $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ と一周させる熱機関aを考えよう。 $A \rightarrow B$ では気体は断熱圧縮され、 $B \rightarrow C$ では体積を一定に保ったまま外部と熱をやりとりして加圧され、 $C \rightarrow D$ では断熱膨張し、 $D \rightarrow A$ では体積を一定に保ったまま外部と熱をやりとりして減圧する。

問1 状態A, B, C, Dのうち、気体の温度が最も低い状態および温度が最も高い状態をそれぞれ示せ。

問2 $B \rightarrow C$ において、気体が外部から吸収する熱量を Q_1 、 $D \rightarrow A$ において、気体が外部から吸収する熱量を Q_2 とする。 Q_1 を状態Bの圧力 p_B 、状態Cの圧力 p_C および両状態共通の体積 V_B を用いて表せ。また、 Q_2 を状態Aの圧力 p_A 、状態Dの圧力 p_D および両状態共通の体積 V_A を用いて表せ。

問3 気体の状態を $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ と一周させたときに気体が外部にする仕事 W_a を Q_1 、 Q_2 を用いて表せ。

問4 体積の圧縮比を $r_a = \frac{V_A}{V_B}$ と定める。このとき、 p_A を p_B と r_a を用いて、 p_D を p_C と r_a を用いてそれぞれ表せ。

問5 Q_1 と Q_2 は一方が正となる。それを Q_a とすると、気体の状態を $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ と一周させる熱機関の熱効率は $e_a = \frac{W_a}{Q_a}$ と定義される。熱効率の1からのずれ $\Delta e_a = 1 - e_a$ を、圧縮比 r_a を用いて表せ。

II. 今度は、図1において、気体の状態を $A \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ と一周させる熱機関bについて考える。状態Eは、状態Cと同じ圧力を持ち、なおかつ $A \rightarrow B$ の断熱変化を表す曲線の延長上にある状態に選ばれている。 $A \rightarrow E$ では気体は断熱圧縮され、 $E \rightarrow C$ では気体の圧力を一定に保ったまま外部と熱をやりとりして膨張し、 $C \rightarrow D$ では断熱膨張し、 $D \rightarrow A$ では体積を一定に保ったまま外部と熱をやりとりして減圧する。

問6 $E \rightarrow C$ において、気体が外部から吸収する熱量を Q_3 とする。 Q_3 を、状態EとCの共通の圧力 p_C 、状態Eの体積 V_E および状態Cの体積 V_B を用いて表せ。

問7 Q_2 と Q_3 は一方が正となる。それを Q_b とする。さらに、気体の状態を $A \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ と一周させたときに気体が外部にする仕事を W_b とすると、この熱機関の熱効率は $e_b = \frac{W_b}{Q_b}$ と定義される。

熱効率の1からのずれ $\Delta e_b = 1 - e_b$ を、圧縮比 $r_b = \frac{V_A}{V_E}$ および定圧膨張比 $s = \frac{V_B}{V_E}$ を用いて表せ。

III. 熱機関aの熱効率 e_a と熱機関bの熱効率 e_b を比較しよう。

問8 図1において、気体の状態を $B \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow B$ と一周させたとき、気体が外部にする仕事 W_c を Q_1 と Q_3 を用いて表せ。

問9 W_c の正負を判定したとき、(a) $W_c > 0$ 、(b) $W_c = 0$ 、(c) $W_c < 0$ のいずれになるか、記号を選んで解答欄に記入せよ。また、二つの熱機関の熱効率 e_a と e_b の大小関係が、(a) $e_a > e_b$ 、(b) $e_a = e_b$ 、(c) $e_a < e_b$ のいずれになるか、記号を選んで解答欄に記入せよ。

(2016年 大阪大)

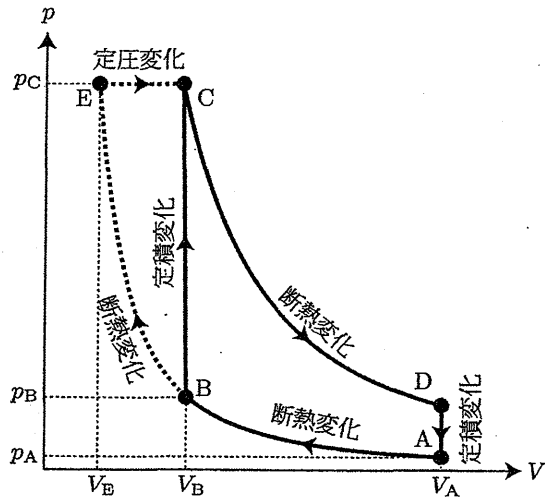


図1

(断熱膨張後は温度が下がり、断熱圧縮後は温度が上がる)と云々考えれば、高温はC、低温はA.

$$Q_1 = \Delta U_{BC} + W_{BC} = \frac{3}{2}(P_C - P_B)V_B (+0)$$

$$Q_2 = \Delta U_{DA} + W_{DA} = -\frac{3}{2}(P_A - P_D)V_A + 0$$

$$= -\frac{3}{2}(P_D - P_A)V_A$$

問3

$$Q_{in} = \Delta U + W_{out}$$

1サイクル分を考えると.

$$Q_1 + Q_2 = 0 + W_a$$

$$W_a = Q_1 + Q_2 //$$

問4.

A → B の断熱変化を考えると.

$$P_A V_A^{\frac{5}{3}} = P_B V_B^{\frac{5}{3}}$$

$$P_A = P_B \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\frac{5}{3}} = P_B V_A^{-\frac{5}{3}} V_B^{\frac{5}{3}}$$

C → D の断熱変化を考えると.

$$P_C V_B^{\frac{5}{3}} = P_D V_A^{\frac{5}{3}}$$

$$P_D = P_C \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\frac{5}{3}} = P_C V_A^{-\frac{5}{3}} V_B^{\frac{5}{3}}$$

問5.

$$e_a = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} \text{ (正しい) } Q_1 \text{ と } Q_2 \text{ は } Q_1 \text{ の } \frac{Q_2}{Q_1} \text{ だけ増える}$$

$$\Delta e_a = 1 - e_a = -\frac{Q_2}{Q_1} \text{ (問2の } Q_1 \text{ と } Q_2 \text{ を代入すれば)}$$

$$= \frac{P_D - P_A}{P_C - P_B} \cdot \frac{V_A}{V_B}$$

$$= \frac{(P_C - P_B) V_A^{-\frac{5}{3}} V_B^{\frac{5}{3}}}{P_C - P_B} \times V_A = V_A^{-\frac{2}{3}} V_B^{\frac{5}{3}}$$

問4の P_D, P_A を代入して.

問6

$$Q_3 = \Delta U + W_{out} = \frac{3}{2} P_C (V_B - V_E) + P_C (V_B - V_E) = \frac{5}{2} P_C (V_B - V_E)$$

問7.

サイクル A → E → C → D → A について.

$$Q_{in} = \Delta U + W_{out}$$

$$Q_2 + Q_3 = 0 + W_b \text{ (正しい)}$$

$$C_b = \frac{Q_2 + Q_3}{Q_3} = 1 + \frac{Q_2}{Q_3}$$

$$\Delta e_b = -\frac{Q_2}{Q_3}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}(P_D - P_A)V_A}{\frac{5}{2}P_C(V_B - V_E)} \text{ (正しい)}$$

正しい.

$$r_a = \frac{V_A}{V_B}, r_b = \frac{V_A}{V_E}, s = \frac{V_B}{V_E} \text{ (正しい)}$$

$$r_a = \frac{V_A}{V_B} = \frac{r_b}{s} \text{ (正しい)}$$

断熱変化 C → D を考えると.

$$P_D V_A^{\frac{5}{3}} = P_C V_B^{\frac{5}{3}} \Rightarrow P_D = P_C \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\frac{5}{3}} = P_C \left(\frac{r}{r_b}\right)^{\frac{5}{3}} = P_C \left(\frac{r_b}{r}\right)^{\frac{5}{3}} \text{ (正しい)}$$

断熱変化 A → E を考えると.

$$P_A V_A^{\frac{5}{3}} = P_C V_E^{\frac{5}{3}}$$

$$P_A = P_C \left(\frac{V_E}{V_A}\right)^{\frac{5}{3}} = P_C r_b^{-\frac{5}{3}} \text{ (正しい)}$$

P_D と P_A を P_C で表して代入すれば、正しい.

① = ④ ~ ⑤ を代入して整理して.

$$\Delta e_b = \frac{3}{5} \frac{s^{\frac{5}{3}} - 1}{s - 1} r_b^{-\frac{2}{3}}$$

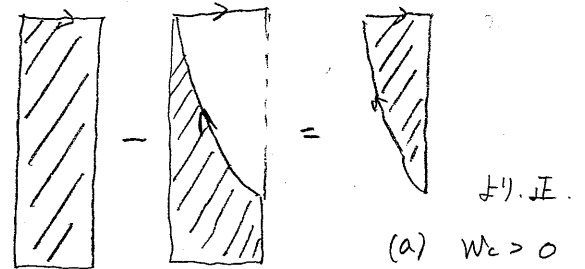
問8

$$W_c = W_b - W_a$$

$$= Q_2 + Q_3 - (Q_2 + Q_1)$$

$$= Q_3 - Q_1 //$$

問9



$$e_a - e_b = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} - \frac{Q_2 + Q_3}{Q_3}$$

$$= \frac{Q_1 Q_3 + Q_2 Q_3 - Q_1 Q_2 - Q_1 Q_3}{Q_1 Q_3}$$

$$= \frac{Q_2 (Q_3 - Q_1)}{Q_1 Q_3}$$

$$Q_2 < 0, (Q_3 - Q_1) > 0 \text{ (正しい)}$$

$$e_a - e_b < 0 \text{ (c) } e_a < e_b //$$