$\boxed{3}$ $A_2 = -A_1$ より.

$$A_1 \sin\left(2\pi\left(ft + \frac{L}{\lambda}\right)\right) = -A_1 \sin\left(2\pi\left(ft - \frac{L}{\lambda}\right)\right)$$

よって、加法定理…というより「和積の公式」から.

$$2A_1 \sin \underbrace{2\pi ft}_{ア} \cos \underbrace{2\pi \frac{L}{\lambda}}_{イ} = 0$$

任意のtで成り立つには、

$$\cos 2\pi \frac{L}{\lambda} = 0$$ であればよく.

よって.

$$2\pi \frac{L}{\lambda} = \frac{2m-1}{2}\pi \qquad m = 1, 2, 3 \cdots \quad \rightarrow \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \cdots$$

$$\lambda = \underline{\frac{4L}{2m-1}}$$ //

①,②,③から.

(a)

$$F(t,x) = A_1 \sin\left(2\pi\left(ft + \frac{x}{\lambda}\right)\right) - A_1 \sin\left(2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right)$$

$$= 2A_1 \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi ft$$

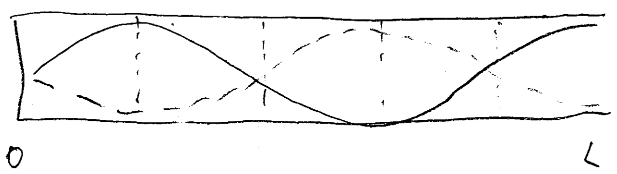
$\lambda = \frac{4L}{2m-1}$ から.

$$= 2A_1 \sin \underbrace{\frac{(2m-1)\pi}{2L} x}_{エ} \cos \underbrace{2\pi ft}_{オ}$$

ある位置xでの　　時間変化

(単振動の)振幅

(b) $m = 3$ だから. $\lambda = \frac{4L}{2 \times 3 - 1} = \frac{4}{5}L$　　5倍振動



左図より.

$0, \frac{2}{5}L, \frac{4}{5}L$ //

(c) 開管の場合 両端で自由端反射が起こるので. 位相はかわらず.

$A_1 = A_2$. よって.

$$A_1 \sin\left(2\pi\left(ft + \frac{L}{\lambda}\right)\right) - A_1 \sin\left(2\pi\left(ft - \frac{L}{\lambda}\right)\right) = 0$$

和積の公式から.

$$\Leftrightarrow 2A_2 \sin 2\pi ft \sin 2\pi \frac{L}{\lambda} = 0$$

任意のtで成立するとすれば.

$$\sin 2\pi \frac{L}{\lambda} = 0 \Leftrightarrow 2\pi \frac{L}{\lambda} = n\pi, \quad \lambda = \underline{\frac{2L}{n}}$$ //

波全体について.

$$A_1 \sin\left(2\pi\left(ft + \frac{x}{\lambda}\right)\right) - A_2 \sin\left(2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right)$$

和積の公式から.

$$A_1 \sin 2\pi ft \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}.$$

$$\lambda = \frac{2L}{n}$$

$$A_1 \sin 2\pi ft \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

3　図1のように，両端の位置が $x=0$，$x=L$ となるように x 軸に沿って置かれた，長さ L の2種類の円筒管での音の共鳴について考える。一方は $x=0$ の端部が閉じ，$x=L$ の端部が開いた閉管であり，他方は両端が開いた開管である。管壁の厚さ，および開口端補正は無視できるものとして，以下の問(1)，(2)に答えよ。解答は解答用紙の所定の場所に記入せよ。また，結果だけでなく，考え方や計算の過程も記せ。

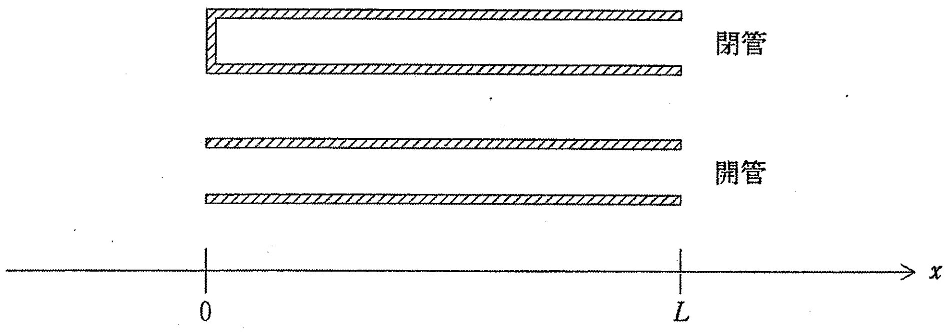


図1

円筒管の中で共鳴する振動数 f，波長 λ の音波に関して，進行波と定常波の関係を考える。時刻 t，位置 x における管の中の媒質(空気)の x 軸の正の向きの変位を $F(t,\ x)$ と書くことにする。このとき，

$$F_1(t,\ x)=A_1\sin\left\{2\pi\left(ft+\frac{x}{\lambda}\right)\right\} \cdots\cdots ①$$

は，x 軸の負の向きに進行する波(左進行波)を表し，

$$F_2(t,\ x)=A_2\sin\left\{2\pi\left(ft-\frac{x}{\lambda}\right)\right\} \cdots\cdots ②$$

は，x 軸の正の向きに進行する波(右進行波)を表す。ここで，$|A_1|$ と $|A_2|$ は，それぞれの波の振幅である。ただし，円筒管端部での反射の際に，進行波の振幅の変化は無視できるものとする。

(a)　閉管に関する下記考察の $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{オ}}$ に入る適切な式を，それぞれ f，t，x，λ，L，および正の整数 m の中から必要なものを用いて記せ。

まず，円筒管端部での進行波の反射について考える。左進行波 $F_1(t,\ x)$ は，$x=0$ で固定端反射をして右進行波 $F_2(t,\ x)$ となる。固定端反射では変位の符号が反転する。すなわち，$F_1(t,\ 0)=-F_2(t,\ 0)$ から次式が得られる。

$$A_1=-A_2 \cdots\cdots ③$$

また，右進行波 $F_2(t,\ x)$ は $x=L$ で自由端反射をする。この反射波が左進行波 $F_1(t,\ x)$ に一致する場合に共鳴が起きる。自由端反射では変位の符号は保たれる。すなわち，$F_1(t,\ L)=F_2(t,\ L)$ から次式が得られる。

$$A_1\sin\left\{2\pi\left(ft+\frac{L}{\lambda}\right)\right\}=A_2\sin\left\{2\pi\left(ft-\frac{L}{\lambda}\right)\right\} \cdots\cdots ④$$

④式に③式を代入して，加法定理($\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$，複号同順)を使って整理すると，次式が得られる。

$$2A_1\sin(\boxed{\text{ア}})\cos(\boxed{\text{イ}})=0 \cdots\cdots ⑤$$

任意の t に対して⑤式が成り立つためには，

$$\boxed{\text{イ}}=\frac{2m-1}{2}\pi\quad(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \cdots\cdots ⑥$$

でなければならない。このことから，共鳴が起きる場合の波長の条件として，次式が得られる。

$$\lambda=\boxed{\text{ウ}}\quad(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \cdots\cdots ⑦$$

次に，閉管内の波全体を表す式について考える。管の中の媒質の変位は，左進行波 $F_1(t,\ x)$ と右進行波 $F_2(t,\ x)$ の重ね合わせとなるから，$F(t,\ x)=F_1(t,\ x)+F_2(t,\ x)$ と書ける。この式に①②③⑦式を代入して加法定理を使って整理すると，次式が得られる。

$$F(t,\ x)=2A_1\sin(\boxed{\text{エ}})\cos(\boxed{\text{オ}})\quad(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \cdots\cdots ⑧$$

⑧式は，媒質が変位しない位置，すなわち節の位置，が時刻によって変わらない定常波を表している。このとき，閉管の中の定常波の節の数は m である。

(b)　問(1)(a)の閉管で，$m=3$ で共鳴している定常波のすべての節の位置 x を，L を用いて表せ。

(c)　問(1)(a)にならって，開管の場合について，定常波の波長 λ が満たす条件を，開管の中の定常波の節の数 $n(=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ と L を用いて表せ。また，開管の中の定常波 $F(t,\ x)$ を，A_1，f，t，x，n，L を用いて表せ。

(2017年　東北大学　一部省略)

(a)ア　$2\pi ft$　　イ　$2\pi\dfrac{L}{\lambda}$　　ウ　$\dfrac{4L}{2m-1}$　　エ　$\dfrac{2m-1}{2}\pi\dfrac{x}{L}$　　オ　$2\pi ft$

(b)　$x=0,\ \dfrac{2}{5}L,\ \dfrac{4}{5}L$　　(c)　$\lambda=\dfrac{2L}{n}$，$F(t,\ x)=2A_1\cos\left(n\pi\dfrac{x}{L}\right)\sin(2\pi ft)$